Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Differentialgleichungen	31
3	Laplace-Transformation	53
4	Modellbildung	79
5	Dynamisches Verhalten	105
6	Dynamik bei Regelungssystemen	129
7	Frequenzgang und Bodediagramm	157
8	Stabilität	181
9	Nyquist-Kriterium	205
10	Reglerentwurf	233
11	Kaskadenregelung	271
12	Wurzelortskurvenverfahren	293

Folienskript zur Vorlesung Systemtheorie 1, 9. Auflage, © S. Leonhardt, MedIT

1. Einführung

Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

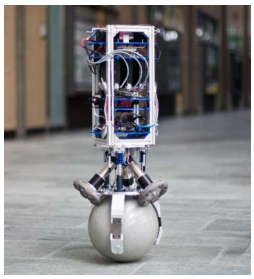
Gliederung

1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Block-Diagramme
1.8 Hausaufgaben

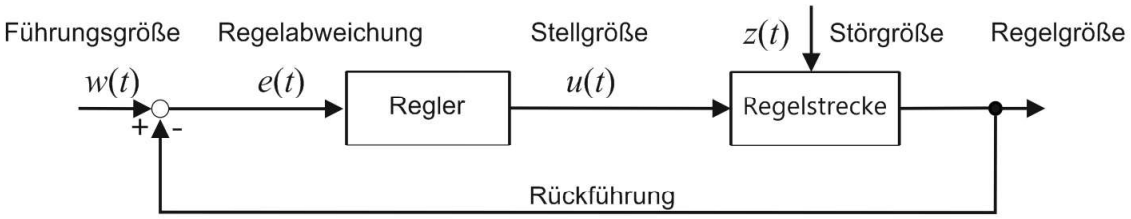
1.1 Einführung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

„Warum fällt der Rezero nicht um?“



http://spectrum.ieee.org/



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/9/9c/Einfacher_regelkreis.gif

1.1 Zu meiner Person

RWTH AACHEN UNIVERSITY

- geb. am 6. Nov. 1961 in Frankfurt/Main
- verheiratet, 2 Söhne (geb. 2001 und 2004)

Akademische Ausbildung

- M.S. in **Computer Engineering** an der SUNY at Buffalo, NY, USA (1987)
- Dipl.-Ing. in **Elektrotechnik** an der TU Darmstadt (1989)
- Promotion zum Dr.-Ing. in **Regelungstechnik** bei Prof. Isermann an der TU Darmstadt (1995). Thema: Neuronale Netze zur Diagnose mechatronischer Systeme.
- Mitarbeiter im DFG Sonderforschungsbereich 241 IMES („**Integrierte Mechanisch-Elektronische Systeme**“).
- Studium der Medizin, Promotion zum Dr. med. an der **Medizinischen Fakultät** der J.W. Goethe U Frankfurt (2001). Thema: Lungenfunktionsdiagnose bei Säuglingen.

Industrielle Berufstätigkeit

- Fa. **Dräger Medical** AG und Co. KG, Lübeck (1999 – 2003)
- Regelungstechnische Algorithmen- und Software-Entwicklung in der BU Anästhesie
- Leitung zweier Entwicklungsprojekte in der BU Intensivmedizin

Dräger

Akademische Berufstätigkeit

- **Philips Lehrstuhl** für Medizinische Informationstechnik an der RWTH Aachen (seit 2003)
- Forschung: **Automatisierungstechnik** für die Medizin, Personal Health Care, med. **Messtechnik**
- Derzeit 25 wiss. Mitarbeiter

RWTH

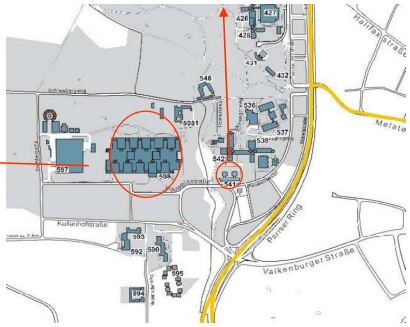
1.1 Lehrstuhl für Medizinische Informationstechnik

Ort: Helmholtz-Institut für Biomedizinische Technik,
nahe Klinikum

Pauwelsstr. 20

Webseite: www.medit.hia.rwth-aachen.de

- Forschungsaktivitäten
  - Messtechnik in der Medizin
  - Automatisierungstechnik in der Medizin
- HiWi Jobs, Bachelor- und Masterarbeiten
- Ausschreibung von wiss. Mitarbeiterstellen

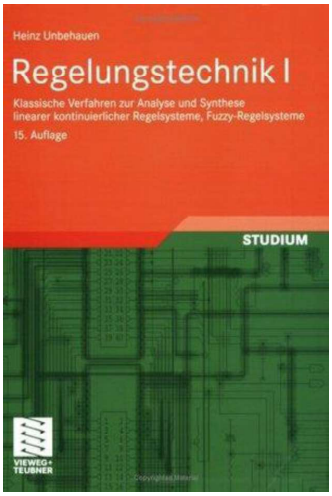


Pauwelsstr. 30

1.1 Literaturempfehlungen

H. Unbehauen, „**Regelungstechnik I**“, 4. Auflage, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1986 (*my version*)

- Heute: 15. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008
  - eBook 32,99 €
  - Softcover 44,99 €
  - Stand: 7. April 2018
- Über SpringerLink verfügbar



Folien zur Vorlesung

- gebunden bei den Vorlesungsassistenten
- Preis: € 10,-

1.1 Zum Weiterlesen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

J. Lunze, „**Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen**“, 10. Auflage, Springer-Verlag GmbH, Berlin, Heidelberg, Aug. 2014

- 48 neu ab EUR 39,99 4 gebraucht ab EUR 39,98
- Stand: 14. April 2015

O. Föllinger, „**Laplace-, Fourier- und z-Transformation**“, VDE -Verlag, 10. vollständig überarbeitete Auflage (20. April 2011)

- neu ab € 20,-, gebraucht ab € 17,50
  - Stand: 15. Februar 2012

Gliederung

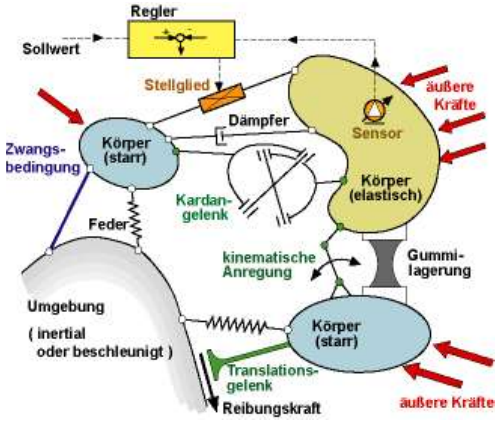
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Block-Diagramme
1.8 Hausaufgaben

1.2 Was ist ein System?

Zitat:

„Der Begriff mechatronisches System bezeichnet ein technisches System, welches aus Komponenten verschiedener physikalischer Teildisziplinen besteht. Stellvertretend sollen dabei die Mechanik, Mikroelektronik, Hydraulik, Pneumatik und nicht zuletzt die Regelungstechnik genannt werden.“

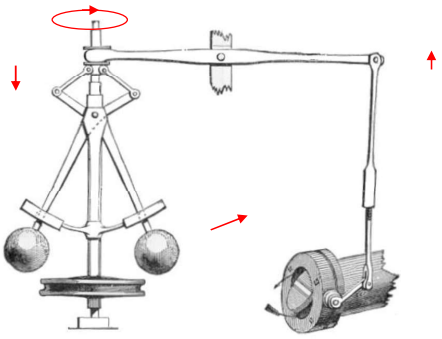


Quelle: http://mesh-engineering.com/Mechatronisches_System/mechatronisches_system.html

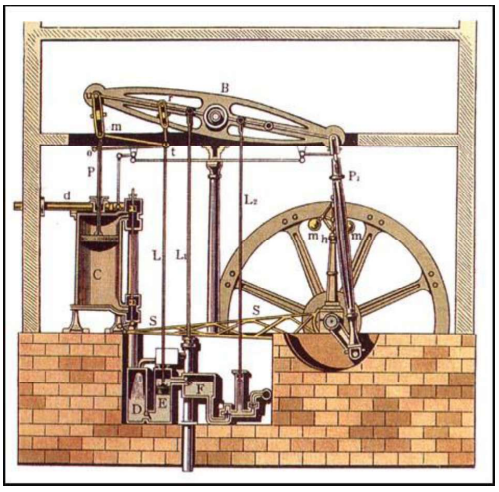
1.2 Historisches Beispiel eines Systems

Regelung der Drehzahl von Dampfmaschinen durch James Watt (1736-1819) und Matthew Boulton

- Drehzahlregler, basierend auf Fliehkräften
- Im Jahr 1788 durch M. Boulton eingeführt



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1e/Centrifugal_governor.png



http://www.vellesanlyceum.nl/geschiedenis/daens/opdrachten/Rotaary%20Steam%20Engine_bestanden/TEXrota.jpg

1. 2 Beispiel eines Systems: modernes Flugzeug

RWTH AACHEN UNIVERSITY

„Der Eurofighter ist ein im Unterschallbereich aerodynamisch um die Querachse instabiles Flugzeug.“

Statisch instabil bedeutet, dass der Punkt, an dem die gesamte Auftriebskraft angreift, vor dem Masseschwerpunkt liegt. Das Flugzeug ist somit bestrebt, stets die Nase nach oben zu ziehen.

Dies verhindern die Flugkontrollcomputer (FCC), da selbst im Geradeausflug permanente, schnelle und präzise Ruderbewegungen zur Fluglagenstabilisierung erforderlich sind und somit eine manuelle, direkte Steuerung durch einen Piloten nicht machbar ist.

(Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Eurofighter#Geschichte)

http://dianhasan.files.wordpress.com/2009/10/singapore-airlines-launch-airline-for-worlds-largest-commercial-carrier-airbus-a380.jpg

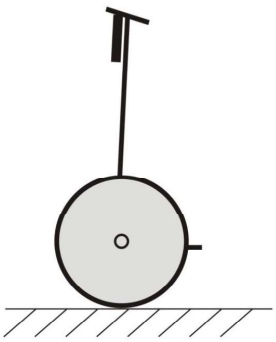
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Typhoon_f2_zj910_arp.jpg

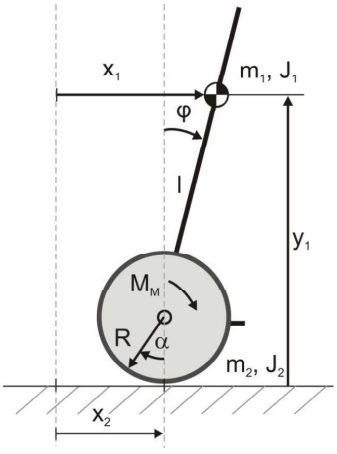
1.2 Ein weiteres Beispiel eines Systems: Der Segway

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Der Einachsenroller ist ein instabiles System. Es fällt um, wenn die Energieversorgung ausgeschaltet wird oder wenn man falsch fährt.

http://www.strassengleiter.de/images/segway-i2-300px.jpg





1.2 Was also ist ein System?

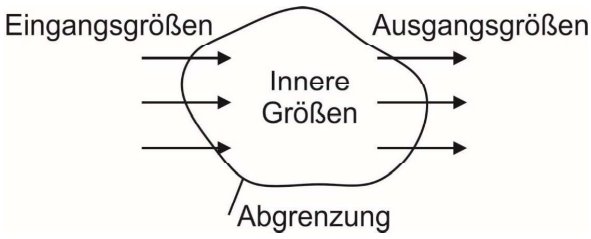
Ein System ist eine Abstraktion der Realität.

Nach DIN 66201: Ein System G ist eine **abgegrenzte** Anordnung von aufeinander einwirkenden Prozessen.

Das System G ist gekennzeichnet durch charakteristische Signalgrößen:
- Eingänge $u(t)$: beeinflussbar
- Ausgänge $y(t)$: messbar
- Zustandsgrößen $\vec{X}(t)$: innere Größen.

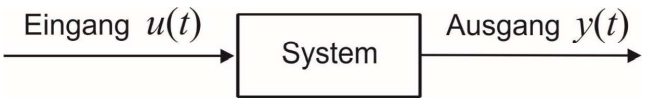
Merke: Diese Größen sind gerichtet!

Ein Prozess P ist die **Umwandlung** oder der **Transport** von:
- Energie
- Materie
- Information



1.2 Blockdarstellung

In der Systemtheorie benutzen wir gerne die sog. „**Blockdarstellung**“



In der Systemtheorie versuchen wir ferner die Realität mit Hilfe von linearen Systemen zu beschreiben:

Begründung: für lineare Systeme gibt es eine geschlossene Theorie
- Sei $y_1(t)$ der Ausgang eines Systems, der durch den Eingang $u_1(t)$ erzeugt wird
- Sei $y_2(t)$ der Ausgang eines Systems, der durch den Eingang $u_2(t)$ erzeugt wird
- Dann gilt: das System ist linear, wenn ein $u(t)$ das folgende $y(t)$ erzeugt

$$u(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$$

$$\forall\ u_1(t), u_2(t) \quad \text{und} \quad c_1, c_2 \in R$$

- $y(t)$ beeinflusst $u(t)$ nicht: Systeme sind per Definition rückwirkungsfrei

Gliederung

1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Block-Diagramme
1.8 Hausaufgaben

1.3 Messen, Steuern, Regeln

Die Begriffe Messen, Steuern und Regeln treten im Zusammenhang mit der Automatisierung von technischen Anlagen (Prozessen) auf.

Automatisierung (bzw. etwas eingeschränkt **Prozessautomatisierung**) ist der Einsatz von selbsttätigen Geräten (Automaten) für folgende Aufgaben:

- **Steuerung**: Beeinflussen einer Größe in Abhängigkeit von einer anderen Größe
- **Regelung**: Angleichen einer Größe an eine andere Größe
- **Protokollierung**: Aufzeichnen (Speichern) von Prozessgrößen in Abhängigkeit von der Zeit
- **Überwachung**: Kontrollieren, ob eine Größe innerhalb eines erlaubten Toleranzgebietes liegt
- **Optimierung**: Aufsuchen eines Extremwertes (z. B. maximaler Wirkungsgrad oder minimaler Brennstoffverbrauch)
- **Koordinieren**: Abstimmen und Optimieren mehrerer Prozesse

1.3 Messen, Steuern, Regeln II

Synonym für Prozessautomatisierung: **Prozessführung** oder **Prozessleittechnik**

Automaten haben im Vergleich zum Bedienungspersonal („von Hand fahren“) folgende Vorteile:

- Sie arbeiten genauer, zuverlässiger, ermüdungsfrei und wirtschaftlicher.
- Die Arbeit des Bedienungspersonals verlagert sich dann zu höherwertigen Aufgaben.

Gliederung

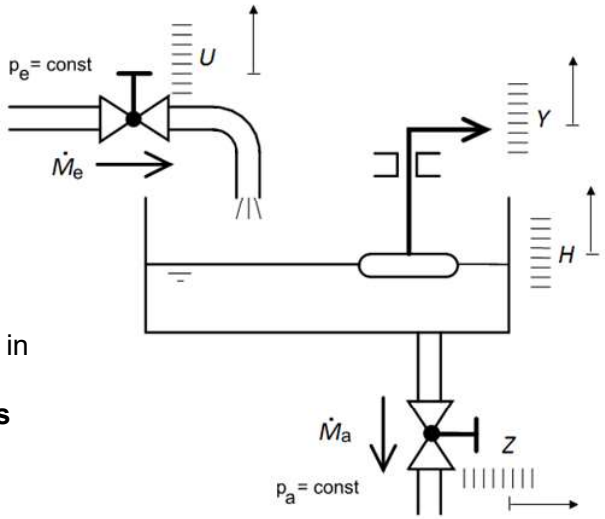
1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Block-Diagramme
1.8 Hausaufgaben

1.4 Beispiel 1: Wassertank

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Steuerung des Flüssigkeitsstandes (Niveau) in einem Behälter

- Signale *Y, Z, H, X*
- Stellgröße *U* – Öffnung Eingangsventil
- Niveau *H*, Niveauanzeige *Y*
- Störgröße *Z* (häufig auch d für *disturbance* oder n für *noise*)



Die statische Kennlinie der **Messeinrichtung** (Kalibrierkurve) sei

$$Y = g(H).$$

Bei konstanter Störgröße Z erhält man in jedem stationären Zustand die **statische Kennlinie des Behälters**

$$H = f(U).$$

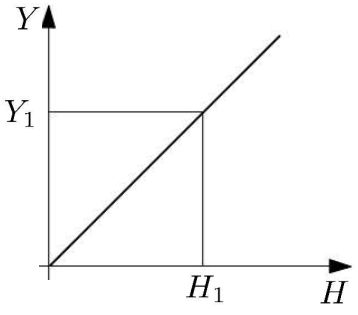
1.4 Beispiel 1: Wassertank

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Damit ergeben sich folgende statische Kennlinien:

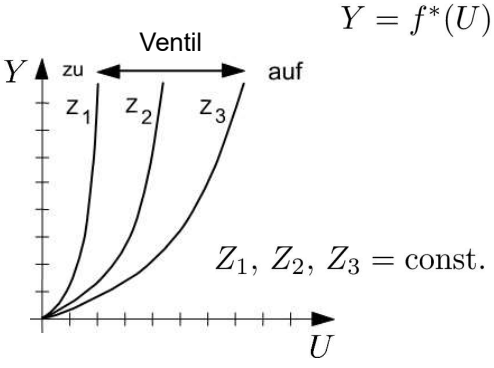
$$Y = g(H) = g(f(U)) = f^*(U)$$

$Y = g(H)$



a) Statische Kennlinie der Messeinrichtung $Y = g(H)$

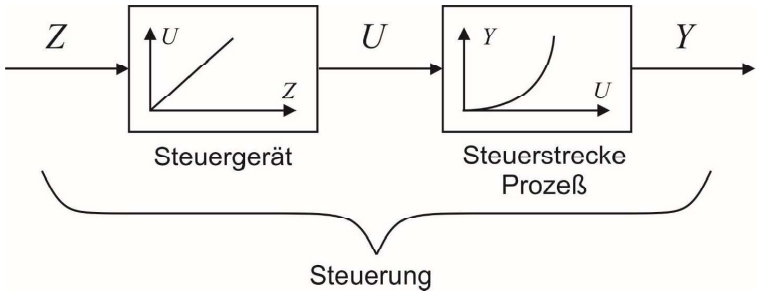
$Y = f^*(U)$



b) Statische Kennlinie von Behälter und Messeinrichtung $Y = f^*(U)$

1.4 Beispiel 1: Wassertank

Eine **selbsttätige Steuerung** besteht aus einem Steuergerät und dem gesteuerten Prozess (Steuerstrecke):



Hierbei wird eine externe Größe (in unserem Fall also z. B. die Störgröße *Z*) gemessen. Das Steuergerät steuert dann über die Stellgröße *U* die Steuergröße *Y*.

- Beim betrachteten Wassertank-Beispiel entspricht *Z* beispielsweise der Stellung des Ausströmventils oder dem Vordruck p_e

1.4 Definition des Begriffs Steuerung

(in Anlehnung an DIN 19226)

Bei einer Steuerung beeinflussen eine oder mehrere Eingangsgrößen die Ausgangsgrößen eines Systems.

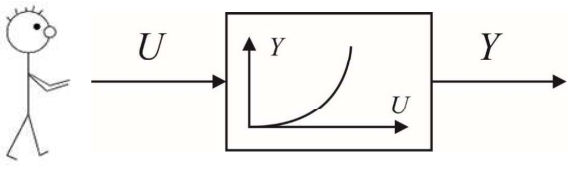
Kennzeichen einer Steuerung:

a) Signalübertragung nur in **einer Richtung**
b) **offener** Wirkungsablauf

Voraussetzungen für eine "fehlerfreie" Steuerung:

- statische Kennlinien in Abhängigkeit von *Z* exakt bekannt
- andere Einflussgrößen dürfen sich nicht ändern (z.B. Vordruck p_e)

Bei der **Steuerung "von Hand"** übernimmt der Mensch das Steuern



Gliederung

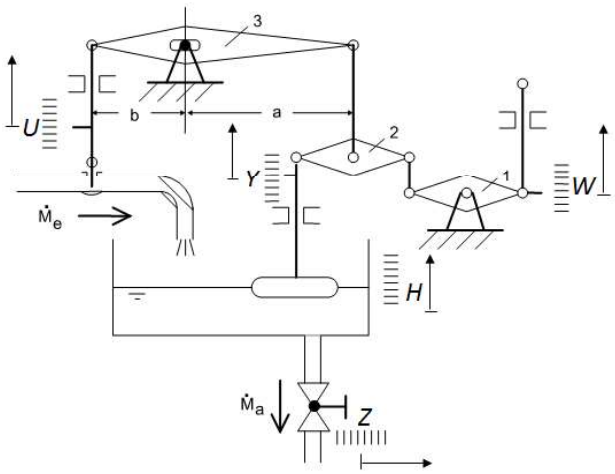
1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Block-Diagramme
1.8 Hausaufgaben

1.5 Beispiel 2: Wassertank mit Füllstandsregelung

Eine andere Möglichkeit, die Größe *Y* selbsttätig zu beeinflussen, ist eine Regelung.

Hierbei laufen folgende Funktionen ab:

- Anzeige *Y* (**Istwert**, **Regelgröße**) laufend messen (Schwimmer).
- Mit vorgegebener (gewünschter) Größe *W* = *Y* (**Sollwert**, **Führungsgröße**) vergleichen (Hebel 1 und 2).
- Bei vorhandener Abweichung *W* – *Y* = *E* (**Regeldifferenz**) die Stellgröße *U* geeignet verstellen (Hebel 3).
- Im Regelkreis muss eine **Vorzeichenumkehrung** stattfinden.



1.5 Beispiel 2: Wassertank mit Füllstandsregelung

Dabei gilt für den mechanischen Regler

$$(U - U_0) = \frac{b}{2a}(W - Y)$$

Hierbei sind Y_0, W_0, U_0 die Signale im Gleichgewichtszustand. Wenn z. B. der Abstrom *Z* (**Störgröße**) größer wird, dann ergeben sich folgende Signaländerungen:

$$+\Delta Z \rightarrow -\Delta Y \rightarrow +\Delta E \rightarrow +\Delta U \rightarrow +\Delta \dot{M}_e \rightarrow +\Delta Y$$

Der Regler gleicht also das abnehmende Niveau durch Vergrößern des Zustromes aus.

Hinweis: das im Bild gezeigte Beispiel ist nur zur Erklärung der Funktionen mit 3 verschiedenen Hebeln gezeichnet.

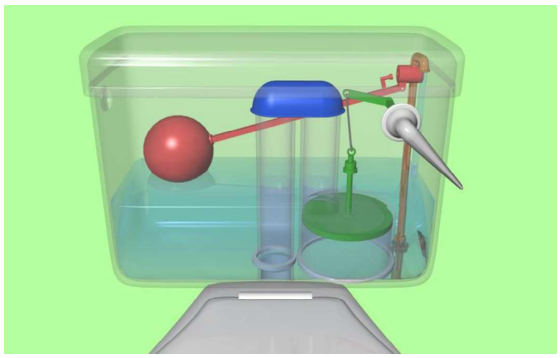
Als Übungsaufgabe überlege man sich Anordnungen mit nur einem Hebel, oder mit direkter Wirkung des Schwimmers auf den Zustrom (ähnlich wie bei einem Schwimmer mit Düsennadel in Vergasern …).

Zur Visualisierung

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/06/Toilet_with_flush_water_tank.jpg/538px-Toilet_with_flush_water_tank.jpg

Beispiel:

- Toilette mit klassischem Aufputz-Spülkasten



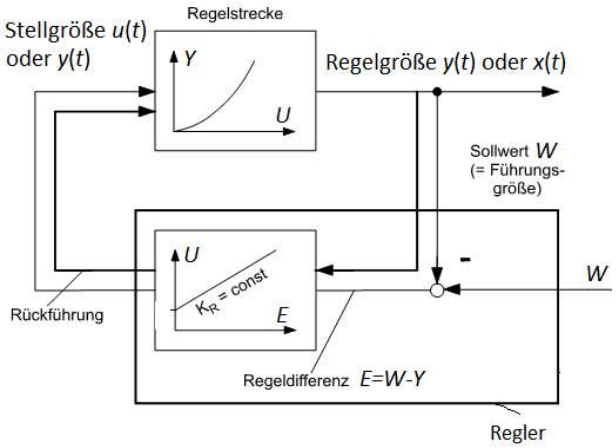
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/31/Toilet-cistern-02.png/800px-Toilet-cistern-02.png

1.5 Definition des Begriffs Regelung

(in Anlehnung an DIN 19226)

Bei einer Regelung wird

a) die Regelgröße *Y* fortlaufend gemessen,
b) mit der Führungsgröße *W* verglichen,
c) die Regelgröße *Y* an die Führungsgröße *W* angeglichen.



Kennzeichen einer Regelung:

a) Signalübertragung folgt in einer Richtung (Wirkungsrichtung)
b) Geschlossener Wirkungsablauf "Regelkreis"
c) Vorzeichenumkehr im Regelkreis
d) Alle Bauglieder (Elemente) dauernd betriebsbereit
e) Ein Regelkreis kann instabil werden

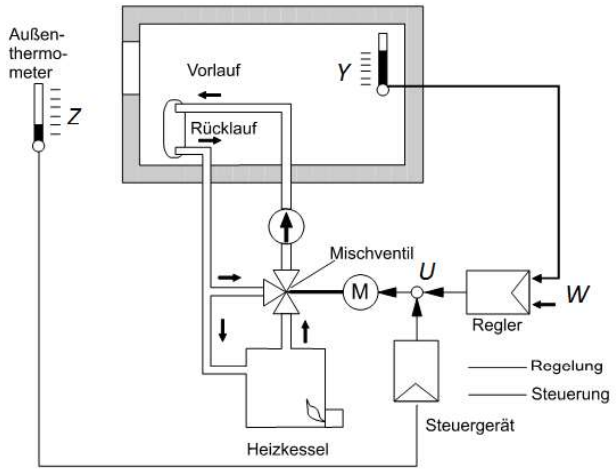
Cave: leider ist die Nomenklatur nicht eindeutig.

1.5 Beispiel 3: Thermostat

Lufttemperaturregelung in einem beheizten Raum (Zentralheizung)

<u>Anmerkung:</u> Besonderheiten bei zentralen Heizungen

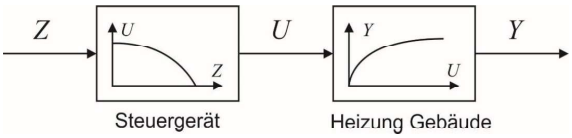
- Die Regelung ist nur für einen Referenzraum möglich. Störungen im Referenzraum wirken sich somit auf alle anderen Räume aus (Nachteil).
- Die Steuerung benötigt keinen Referenzraum. Störungen in einem Raum wirken sich damit nicht auf die anderen Räume aus (Vorteil).
- Im Allgemeinen ist die **Kombination von Steuerung** (sog. „Störgrößenaufschaltung“) und **Regelung** besonders vorteilhaft (dazu später mehr).



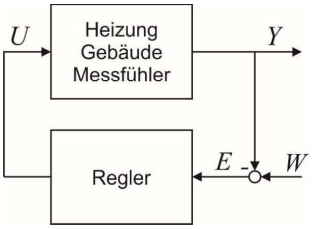
1.5 Beispiel 3: Thermostat

Vergleich: Heizungssteuerung und -regelung

	Vorteile	Nachteile
Steuerung	Erfasst Außentemperatur (Störgröße) früher	Gewünschte Innentemperatur wird nicht immer erreicht, wenn nicht berücksichtigte Einflussgrößen auftreten
Regelung	Erfasst alle Einflussgrößen; gewünschte Innentemperatur wird i. A. erreicht	Verstellung des Mischventils erst nach Änderung der Innentemperatur



Steuerung



Regelung

1.5 Aufgaben einer Regelung

- Eine bestimmte physikalische Größe auf einen vorgegebenen Wert bringen und diesen Wert halten.
- Den Einfluss von Störgrößen mindern oder völlig kompensieren (ausregeln).
- Einen schwach gedämpften Prozess stärker dämpfen.
- Einen instabilen Prozess stabilisieren.
- Parameteränderungen des Prozesses abschwächen.
- Schnellere Änderungen der Ausgangsgröße erzielen als ohne Regelung.

Beispiele für Regelungsarten:

Festwertregelung:	$W = const.$
Führungsregelung:	$W = f(t)$ (Nachlauf-, Servoregelung)
Endwertregelung:	Ein bestimmter Endwert soll erreicht werden (z. B. möglichst schnell).
Extremwertregelung:	Ein unbekannter Extremwert soll erreicht und geregelt werden - Optimierung.
Adaptive Regelung:	Das dynamische und statische Verhalten des Reglers passt sich selbsttätig an die Regelstrecke an.

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Block-Diagramme
1.8 Hausaufgaben

1.6 Messen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Die Grundvoraussetzung für die Regelung oder Steuerung einer Größe ist, dass die Größen *Z* oder *Y* (**Störgröße** oder **Regelgröße**) gemessen werden können.

Grundbegriffe des Messens

a) Erfassen und Darstellen einer physikalischen Größe *Y*

b) Zuordnen einer Maßzahl als Vielfaches der Normalen (Vergleichswerte) *N*

$$Y = Y_M \cdot N$$

c) Fundamentalvoraussetzungen:
- Die zu messende Größe muss eindeutig definiert sein
- Das Maßnormal muss durch eine Konvention festgelegt sein.

d) Grundeinheiten der Grundnormalen (internationales Einheitssystem SI):
- Meter (m), Masse (kg), Sekunde (s), Strom (A), Temperatur (K), Lichtstärke (cd), Molekulargewicht (mol).
- Im Folgenden wird ausnahmsweise an Stelle von “s” die Dimensionsbezeichnung “sec” verwendet, um Verwechslungen mit der Laplace-Variablen $s = \delta + j\omega$ zu vermeiden.

1.6 Definitionen gemäß DIN 1319, Blatt 1, 2 und 3

Messgröße: Physikalische Größe, die durch Messung erfasst wird

Messwert: Wert der Messgröße

Messergebnis:
- einfacher Fall: Messwert oder Messsignal
- allgemeiner Fall: aus mehreren Messwerten wird eine Messgröße ermittelt

Messunsicherheit (DIN 1319, Blatt 3):
Zufälliger Messfehler und nicht erfassbare systematische Fehler:
- Systematische Messfehler: durch unvollkommene Messgeräte, Messverstärker - Korrekturen
- Zufällige Messfehler: nicht erfassbare, nicht beeinflussbare Änderungen der Messgeräte und der Umwelt

1.6 Messverfahren (DIN 1319)

Direkte Messung: unmittelbarer Vergleich mit Normal

Indirekte Messung: gesuchter Messwert wird auf eine andere physikalische Größe zurückgeführt und über physikalische Zusammenhänge ermittelt

Analoge Messung: die Ausgangsgröße (z.B. Anzeige einer Messeinrichtung) ist eine eindeutige, punktweise stetige Darstellung der Messgröße

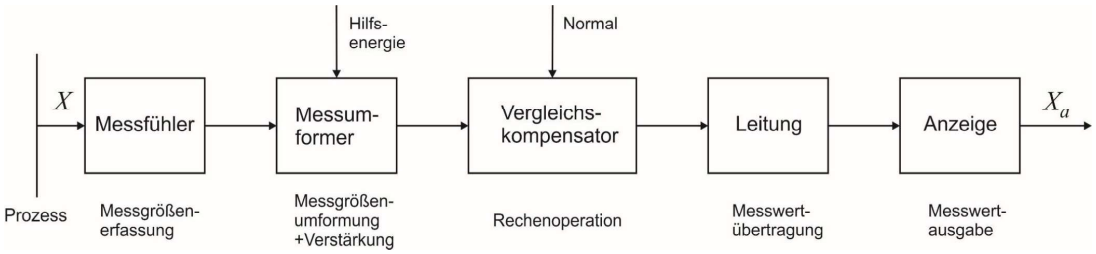
Digitale Messung: die Ausgangsgröße ist eine quantisierte, in Ziffern dargestellte Messgröße

Messprinzip: Charakteristische physikalische Erscheinung, die bei der Messung benutzt wird. Beispiele:
- Länge: Lichtinterferenz, Kapazitätsänderung
- Temperatur: Längenausdehnung, elektrische Widerstandsänderung
- Druck: Elastische Formänderung (Rollfeder), Piezoaufnehmer
- Durchfluss: Differenzdruck an Blende, Staurohr

1.6 Messkette I

Messgrößenerfassung: Messfühler (Sensor)
- sollen möglichst rückwirkungsfrei sein
- teilweise mit anderen Teilgeräten integriert

Messgrößenumformung: Messumformer, Messwandler
- Umformung in andere physikalische Größen
- für Regelungstechnik: Einheitssignale
  - pneumatisch: 0,2 - 1 bar
  - elektrisch: 0 - 20 mA, 4 - 20 mA, 0 - 10 V - Verstärkung durch Leistungsverstärker



1.6 Messkette II

Rechenoperation: Vergleich mit Normal
- Messwert:
  - Korrektur
  - Verknüpfung mit anderen Größen
  - Nullpunktunterdrückung
  - Mittelwertbildung

Messwertübertragung:
- Bei örtlicher Trennung von den Geräten zur Messwertverarbeitung
- elektrische, pneumatische, hydraulische Verbindungsleitungen
- analoge Übertragung
- digitale Übertragung

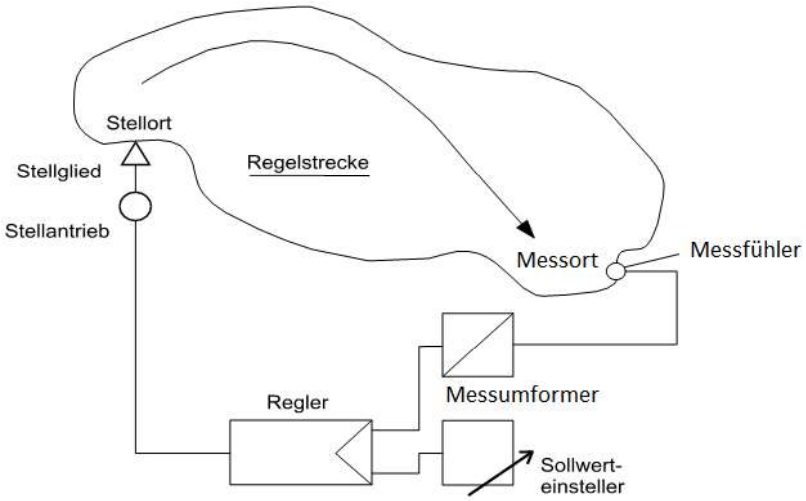
Messwertausgabe:
- Anzeigegeräte
- Schreibgeräte, Drucker
- Regler
- A/D-Umsetzer für Prozessrechner

1.6 Grundsätzlicher Aufbau von Regelkreisen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gerätetechnische Anordnung

- Geräte eines Regelkreises mit Bildzeichen nach DIN 19228

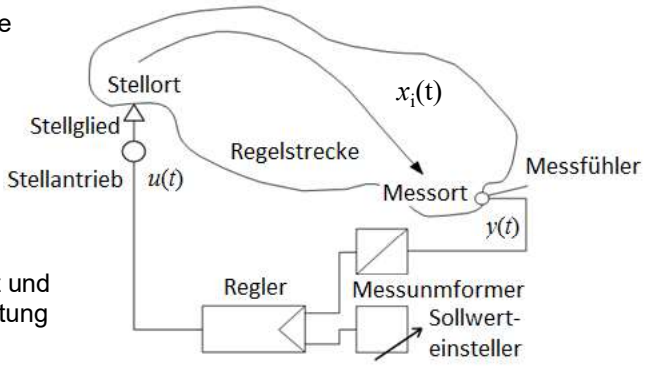


1.6 Definitionen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Steuerstrecke: gesteuerter Prozess
Regelstrecke: geregelter Prozess

Die Regelstrecke ist derjenige Bereich eines Systems oder Prozesses, in dem sich nach einer Änderung der Stellgröße $u(t)$ innere Zustandsgrössen $x_i(t)$ ändern, die die Regelgröße $y(t)$ beeinflussen.



Hieraus folgt:

(i) Die Regelstrecke beginnt am Stellort und endet am Messort (in Signalflussrichtung gesehen).

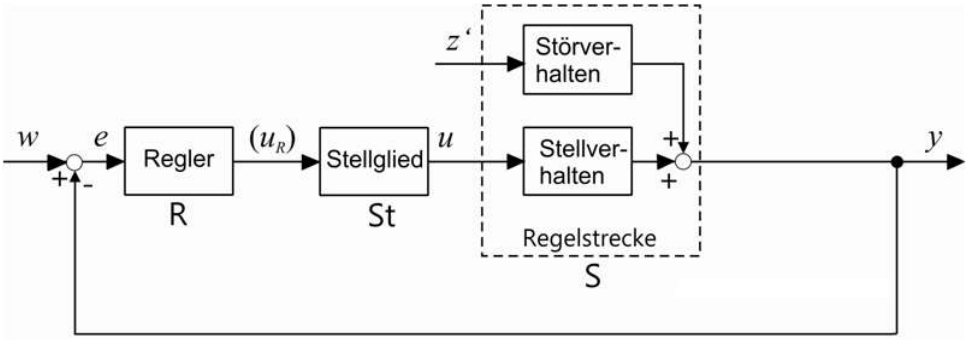
(ii) Die Regelstrecke eines Prozesses umfasst alle Teile, deren „Zustandsgrößen“ (innere Größen) auf dem Signalfluss zwischen der Stellgröße und der Regelgröße liegen.

1.6 Grundstruktur eines Standardregelkreises

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Internationale Nomenklatur

- y die Regelgröße (Istwert)
- w die Führungsgröße (Sollwert)
- e die Regelabweichung
- u die Stellgröße
- z die Störgröße oder
- d die Störgröße (*disturbance*) oder
- n die Störgröße (*noise*)



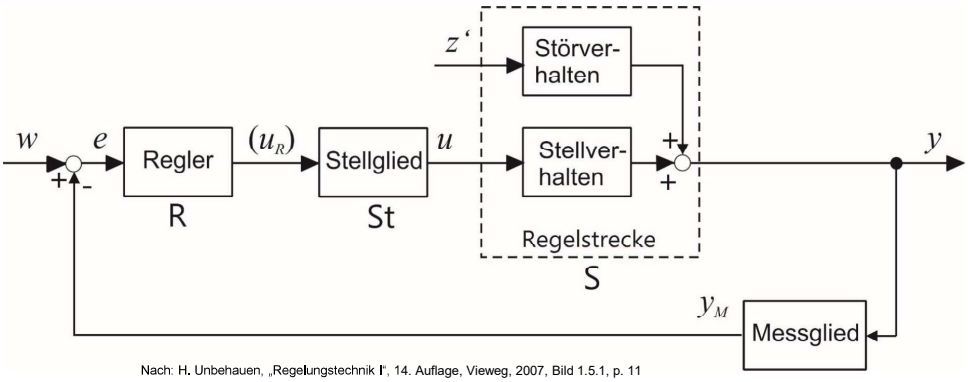
Nach: H. Unbehauen, „Regelungstechnik I", 14. Auflage, Vieweg, 2007, Bild 1.5.1, p. 11

1.6 Grundstruktur eines Standardregelkreises

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Internationale Nomenklatur

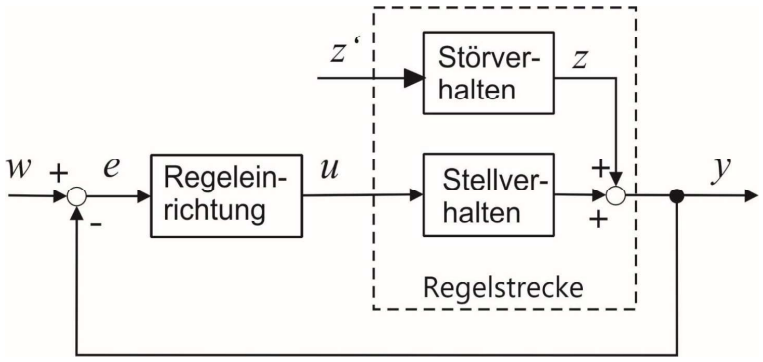
- y die Regelgröße (Istwert)
- w die Führungsgröße (Sollwert)
- e die Regelabweichung
- u die Stellgröße
- z die Störgröße oder
- d die Störgröße (*disturbance*) oder
- n die Störgröße (*noise*)



Nach: H. Unbehauen, „Regelungstechnik I", 14. Auflage, Vieweg, 2007, Bild 1.5.1, p. 11

1.6 Vereinfachtes Blockschaltbild eines Regelkreises

- Regeleinrichtung enthält Regelalgorithmus und Stellglied
- Regelstrecke enthält Prozess und Messglied (und manchmal das Stellglied)



Nach: H. Unbehauen, „Regelungstechnik I", 14. Auflage, Vieweg, 2007, p.13

Gliederung

1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Blockdiagramme
1.8 Hausaufgaben

1.7 Begriffe mit Bezug zu Signalen nach DIN 19226

Wirkungsweg: Weg der Wirkungen beim Steuern und Regeln.

Wirkungsrichtung: Richtung der Übertragung von Wirkungen.

Signal:

- Darstellung von Information(en)
- Darstellung durch den Wert einer physikalischen Größe
- Signale und ihre Darstellung können übertragen, verarbeitet oder gespeichert werden
- Signale sind i. A. Funktionen der Zeit
- Signalparameter: Kenngrößen eines Signals (z.B. Amplitude, Frequenz)
- Signalflussweg: Wirkungsweg von Signalen in der Wirkungsrichtung

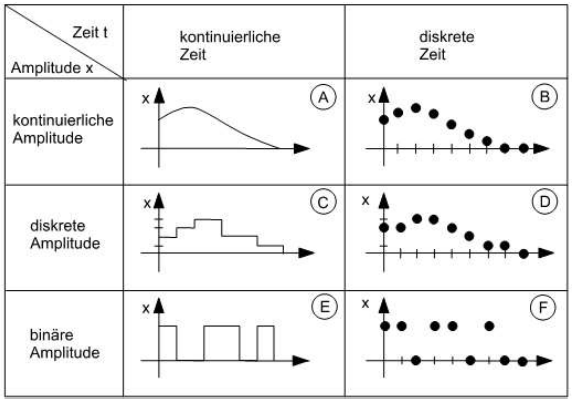


Tabelle: Verschiedene Signalarten

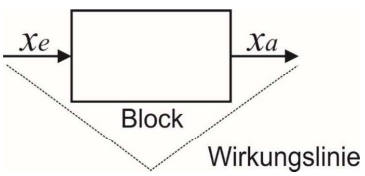
(A) kontinuierliche Systeme
(B) Abtastsysteme
(C) Relaissysteme
(D) Digitale (Regel)Systeme
(E) Binäre (Schalt)Systeme
(F) Digitale (Steuer)Systeme

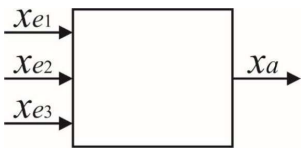
1.7 Signalflussplan und Blockschaltbild I

Signalflussplan: sinnbildliche Darstellung der Wirkungen zwischen den Signalen eines Systems

Block: stellt die wirkungsmäßige Abhängigkeit eines Ausgangssignals $x_a(t)$ von den Eingangssignalen $x_{ei}(t)$ eines Übertragungsglieds dar.

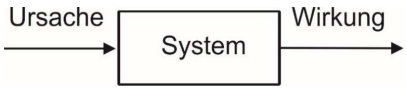
- Kennzeichnung der wirkungsmäßigen Abhängigkeit der Signale z.B. durch Gleichungen, Kennlinien, Begriffe innerhalb des Blocks.
- Unterteilung eines Systems in Blöcke derart, dass **Signale in einem Block nur in einer Richtung** übertragen werden (d.h. Blöcke für elementare Komponenten bilden).



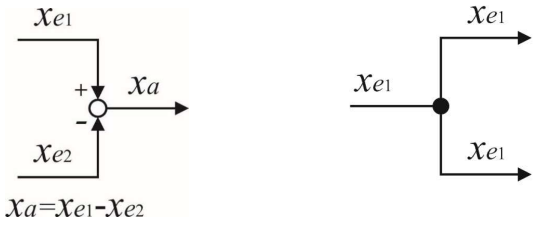


1.7 Signalflussplan und Blockschaltbild II

- Bildung von Komponenten derart, dass das Eingangssignal die Ursache und das Ausgangssignal die Wirkung ist. Sog. „**Kausalitätsprinzip**“



- **Konvention zur Richtung**: Signale verlaufen im Bild in der Regel von links nach rechts.
- **Additionsstelle**: Ausgangssignal gleich der Summe der Eingangssignale (Vorzeichen beachten).
- **Verzweigungsstelle**: Wirkungslinie spaltet sich in mehrere Wirkungslinien auf.



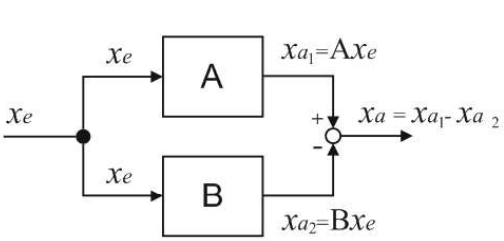
1.7 Signalflussplan und Blockschaltbild III

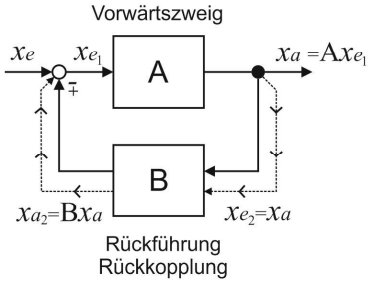
Kombination von Blöcken:

- Blockschaltbilder = Signalflusspläne
- Rückwirkungsfreiheit (keine Belastung durch nachfolgende Blöcke)

Grundstrukturen von Blockschaltbildern:

- Kettenstruktur
- Parallelstruktur
- Kreisstruktur mit Rückkopplung: Mitkopplung (+), Gegenkopplung (-)





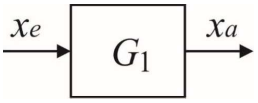
1.7 Grundschaltungen I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Statisches Verhalten

$G_1 = K_1$ „Übertragungsbeiwert“

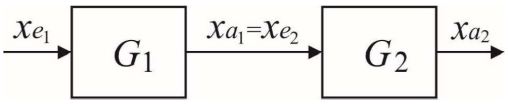
$x_a = K_1 \cdot x_e = G_1 \cdot x_e;$



später: $G(s)$! „Übertragungsfunktion“

Statisches Verhalten bei Kettenschaltung

$$x_{a_2} = G_1 \cdot G_2 \cdot x_e = K_1 \cdot K_2 \cdot x_{e_1}$$

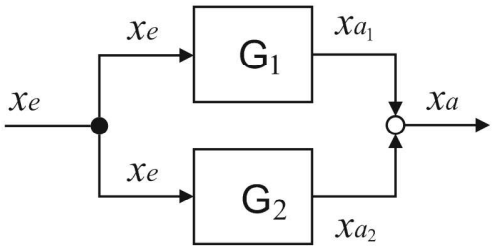


1.7 Grundschaltungen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Parallelschaltung

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_{a_1} + x_{a_2} \\ x_{a_1} &= G_1 x_e \\ x_{a_2} &= G_2 x_e \end{aligned}\right\} \; x_a = (G_1 + G_2) x_e$$

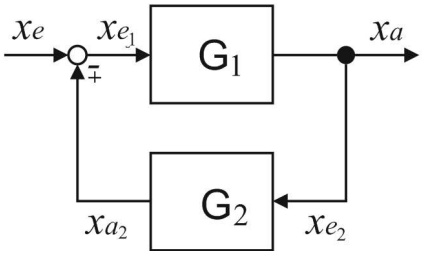


Kreisstruktur mit Rückkopplung

$$\left.\begin{aligned} x_a &= G_1 x_{e_1} && (1) \\ x_{e_1} &= x_e \mp x_{a_2} && (2) \\ x_{a_2} &= G_2 x_a && (3) \end{aligned}\right\} \; x_a = \frac{G_1}{1 \pm G_1 G_2} x_e$$

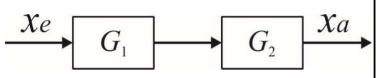
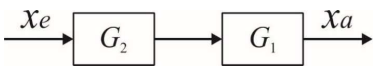
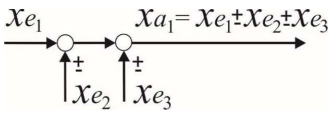
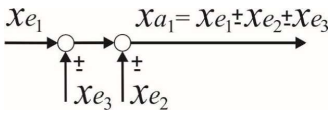
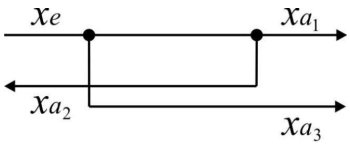
(3) in (2): $x_{e_1} = x_e \mp G_2 x_a$ (4)

(4) in (1): $x_a = G_1 [x_e \mp G_2 x_a]$



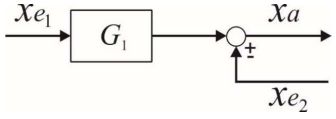
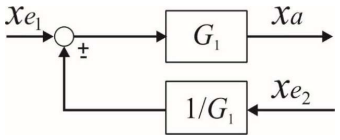
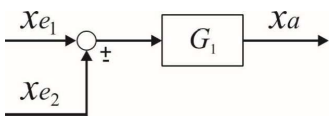
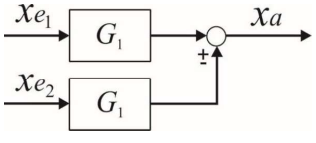
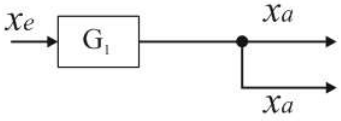
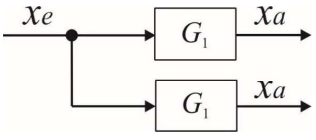
1.7 Tabelle zur Blockschaltbildumformung I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

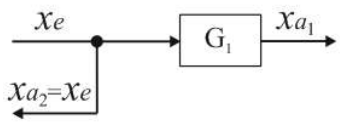
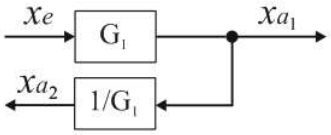
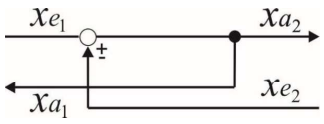
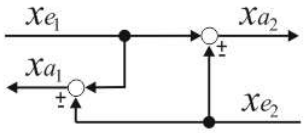
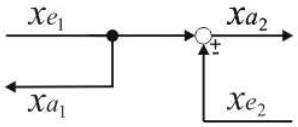
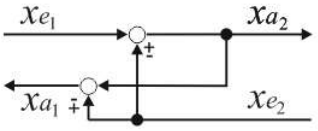
Vorgang	Originalschaltung	Entsprechende Schaltung
Vertauschen von Elementen		
Vertauschen von Summations-stellen		
Vertauschen von Verzweigungs-stellen		

1.7 Tabelle zur Blockschaltbildumformung II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

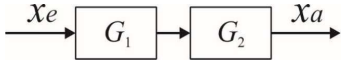
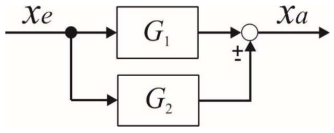
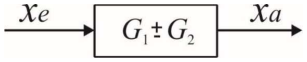
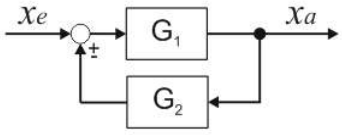
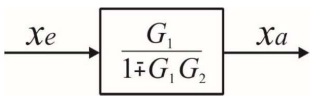
Vorgang	Originalschaltung	Entsprechende Schaltung
Verlegen einer Summations-stelle entgegen der Wirkungs-richtung		
Verlegen einer Summations-stelle in der Wirkungs-richtung		
Verlegen einer Verzweigungs-stelle entgegen der Wirkungs-richtung		

1.7 Tabelle zur Blockschaltbildumformung III

Vorgang	Originalschaltung	Entsprechende Schaltung
Verlegen einer Verzweigungs-stelle in der Wirkungs-richtung		
Verlegen einer Verzweigungs-stelle vor einer Summations-stelle		
Verlegen einer Verzweigungs-stelle hinter eine Summations-stelle		

1.7 Tabelle zur Blockschaltbildumformung IV

Merke: diese Regeln gelten nicht nur bei statischen, sondern auch bei dynamischen Systemen (siehe später)

Vorgang	Originalschaltung	Entsprechende Schaltung
Zusammen-fassung einer Reihenschaltung		
Zusammen-fassung einer Parallelschaltung		
Zusammen-fassung einer Kreisschaltung		

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.1 Organisation und Literaturangaben
1.2 Zur Einführung: Systembegriff
1.3 Messen, Steuern, Regeln - Definition der Begriffe
1.4 Steuern
1.5 Regeln
1.6 Messen
1.7 Signalflussplan und Block-Diagramme
1.8 Hausaufgaben

Zum Nachlesen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.) Hausaufgabe:
Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …

2.) Für Fleissige:
H. Unbehauen, „**Regelungstechnik I**“, 15. Auflage, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008

- Lesen Sie Kapitel 1

2. Differentialgleichungen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.1 Systemgleichungen
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale
2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen
2.4 Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare zeitinvariante Dgln.
2.5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2.6 Linearisierung
2.7 Hausaufgaben

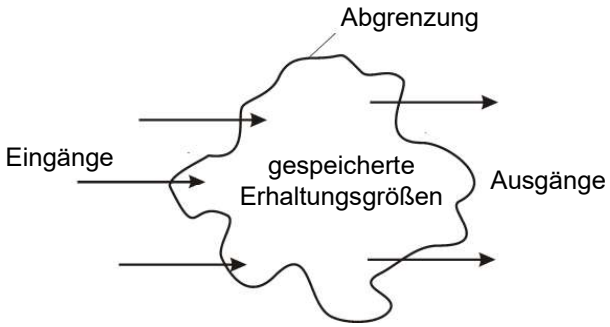
2.1 Systemgleichungen I

Wir erinnern uns: nach DIN 66201 war ein **System G** eine **abgegrenzte** Anordnung von aufeinander einwirkenden Prozessen.

Ein **Prozess P** ist die **Umwandlung** oder der **Transport** von Energie, Materie, Information.

Um zu den Systemgleichungen zu kommen, muss man sogenannte „Erhaltungsgrößen“ bilanzieren, z.B. Erhaltung der Energie, Drehmomentenbilanz, Kräftegleichgewicht, Knotengleichung, usw.

$$\dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} = \frac{d}{dt} Q_{speicher}(t)$$

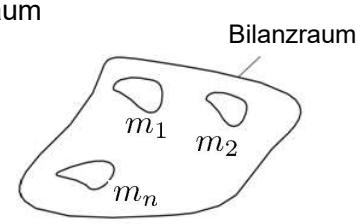


2.1 Systemgleichungen II

Weiteres **Beispiel**:

Massenerhaltung in einem abgeschlossenen Bilanzraum

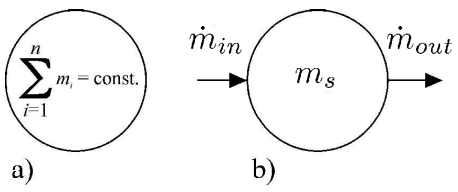
$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \text{const.}$$



Bilanzierte Massenströme

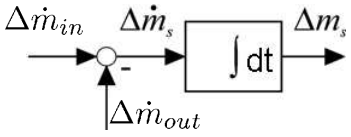
$$\dot{m}_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t) = \frac{dm_s(t)}{dt} = \dot{m}_s(t)$$

Massen-zustrom	Masssen-abstrom	Massen-zuwachs



Kleine Abweichungen

$$\Delta\dot{m}_{in}(t) - \Delta\dot{m}_{out}(t) = \frac{d}{dt}\Delta m_s(t)$$



Gliederung

2.1 Systemgleichungen
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale
2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen
2.4 Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare zeitinvariante Dgln.
2.5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2.6 Linearisierung
2.7 Hausaufgaben

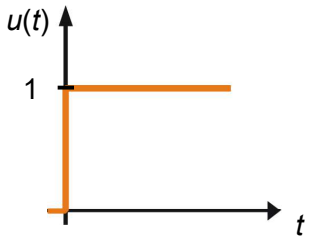
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale I

In der Systemtheorie werden häufig spezielle Testsignale als Eingänge $u(t)$ angewendet:

Sprungfunktion: $$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

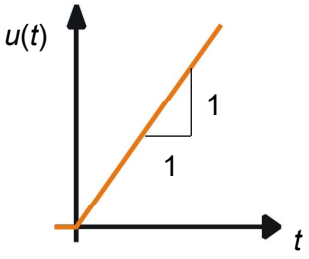
bzw. $$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \geq t_0 \\ 0 & \text{für} \quad t < t_0 \end{cases}$$

engl. *unit step* $$u(t) = 1(t)$$



Rampe: $$r(t) = \begin{cases} t & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

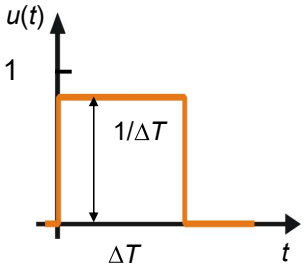
bzw. $$r(t - t_0) = \begin{cases} t - t_0 & \text{für} \quad t \geq t_0 \\ 0 & \text{für} \quad t < t_0 \end{cases}$$



2.2 Spezielle Testsignale II

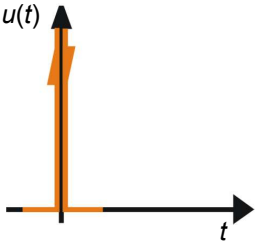
Rechteck-Puls $p(t) = \begin{cases} 1/\Delta T & \text{für} \quad 0 \le t < \Delta T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

bzw. $p(t - t_0) = \begin{cases} 1/\Delta T & \text{für} \quad t_0 \le t < \Delta T + t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



δ -Impuls $\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta T \to 0} \begin{cases} 1/\Delta T & \text{für} \quad t_0 \le t < \Delta T + t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

wobei $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$



auch als „δ-Funktion, Dirac-Funktion, Dirac-Impuls, Dirac-Puls oder Dirac-Stoß“ bezeichnet …

Gliederung

2.1 Systemgleichungen
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale
2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen
- **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen**
- **Zeitvariante und zeitinvariante Differentialgleichungen**
- **Lineare und nichtlineare Differentialgleichungen**
- **Fundamentalsystem**

2.4 Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare zeitinvariante Dgln.
2.5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2.6 Linearisierung
2.7 Hausaufgaben

2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definitionen:

- **Differentialgleichung (Dgl.):** algebraische oder transzendente Gleichung für eine gesuchte Funktion $y(x)$, die von einer oder mehreren Variablen abhängt und die Ableitungen der Funktion enthält.

- **Gewöhnliche Differentialgleichung:** Differentialgleichung, die Ableitungen der Funktion(en) nach einer Variablen enthält.

  In der Regelungstechnik findet man üblicherweise Ableitungen nach der Zeit, die mit einem "." gekennzeichnet werden, und dynamisches Verhalten in der Zeit kennzeichnen, z.B.
  $$y(t) + a_1\dot{y}(t) + ... + a_n y^{(n)}(t) \;=\; b_0 u(t) + b_1\dot{u}(t) + ... + b_m u^{(m)}(t), \quad m \le n$$

  Merke: der "." bedeutet d/dt und der Index (n) bedeutet die n-te Ableitung nach der Zeit.

- **Partielle Differentialgleichung:** Differentialgleichung, die partielle Ableitungen der Funktion enthält.

  Beispiel: gegeben sei die Temperatur *T*(*x*,*t*) und ein Material mit der Wärmeleitfähigkeit σ_W. Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Dgl.
  $$\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_W \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition der Begriffe „zeitvariant" und „zeitinvariant":

- Eine ***zeitinvariante*** **Differentialgleichung** ist eine Dgl., in der **keine** Parameter (Koeffizienten) explizit von der **Zeit** abhängen.
  Wenn alle a_i, b_i konstant sind, dann ist die Differentialgleichung zeitinvariant.

$$y(t) + a_1\dot{y}(t) + ... + a_n y^{(n)}(t) \;=\; b_0 u(t) + b_1\dot{u}(t) + ... + b_m u^{(m)}(t), \quad m \le n$$

- Eine ***zeitvariante*** **Differentialgleichung** ist eine Dgl., in der **ein oder mehrere** Parameter (Koeffizienten) explizit von der **Zeit** abhängen.

  Beispiel:
  Sei $m = 0,\ n = 1$ und der Koeffizient $a_1 = t$ $\rightarrow$

$$y(t) + t \cdot \dot{y}(t) \;=\; b_0 u(t)$$

2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definitionen: lineare und nichtlineare Differentialgleichungen

- **Linearer Ausdruck:** In einem linearen Ausdruck kommen nur lineare Potenzen der Funktionen oder unabhängigen Variablen vor.
- Eine **lineare Gleichung** besteht aus einer Summe von linearen Ausdrücken.
- **Nichtlinearer Ausdruck:** Alle übrigen Gleichungsarten nennt man **nichtlineare Gleichungen**. Diese enthalten z.B. höhere Potenzen, Produkte oder transzendente Funktionen (z.B. $x^2,\ \sin x,\ \cos x$).

- In einer **linearen Differentialgleichung** kommen nur lineare Ausdrücke der unabhängigen Variablen oder ihrer Ableitungen vor.
- Alle anderen **Differentialgleichungen** nennt man **nichtlinear**.

Beispiele:

$$\cos y(t) + \dot{y}^2(t) = b_0 u(t)$$ nichtlineare Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j(t) \frac{d^j u}{dt^j}$$ zeitvariant, aber linear

2.3 Differentialoperatoren

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Betrachte die zeitinvariante lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

Definiere den **Differentialoperator** $D = \frac{d}{dt}$ und mehr allgemein den Differentialoperator n-ter Ordnung

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

Einsetzen in Dgl.

$$\Rightarrow D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + a_1 D y + a_0 y = u$$

$$\underbrace{\left(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right)}_{\text{Charakteristisches Polynom}} \cdot y = u$$

2.3 Die Charakteristische Gleichung

Definitionen:

- Das Polynom $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$ heißt das **„charakteristische Polynom“.**
- Die Gleichung $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0 = 0$ heißt die **„charakteristische Gleichung“**. Im deutschsprachigen Raum findet man oft λ anstelle von D.

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra wissen wir, dass eine solche charakteristische Gleichung genau n Lösungen hat (**“Nullstellen“**, engl.“*roots*“).
  - Diese Nullstellen sind nicht notwendigerweise voneinander verschieden.
  - Diese Nullstellen sind nicht notwendigerweise reell, komplexe Nullstellen sind möglich.

Beispiel:

Betrachte die lineare zeitinvariante Dgl.: $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$

- Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$
- Sie hat zwei einfache Nullstellen bei $\lambda = -1,\ \lambda = -2.$

2.3 Lineare Unabhängigkeit

Definition:

- Ein Satz von n Funktionen $f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots\ f_n(t)$ nennt man **linear unabhängig**, falls die Gleichung

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_n f_n(t) = 0$$

für einen Satz von Konstanten $c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n$ für alle *t* nur für $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ erfüllt werden kann.

Beispiel:

- Behauptung: die Funktionen *t* und t^2 sind linear unabhängig.
- Beweis: $c_1 t + c_2 t^2 = t \cdot (c_1 + c_2 t) = 0$

dies kann nur erreicht werden für: $c_1 = c_2 = 0.$

2.3 Fundamentalsystem I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Behauptung:

Eine lineare *homogene* Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt mindestens einen System von n linear unabhängigen Lösungen.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = 0$$

Merke: *homogen* bedeutet Eingang u(t) = 0.

Definition:

- Jedes System von n linear unabhängigen Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung wird als **„Fundamentalsystem“** bezeichnet.
- Ein Fundamentalsystem bildet damit eine Basis des Lösungsraumes.
- **Fundamentalsysteme sind nicht eindeutig**:
  - aus einem bekannten Fundamentalsystem können weitere Fundamentalsysteme erzeugt werden.

2.3 Fundamentalsystem II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel:

Sei $y_1(t), y_2(t), \ldots y_n(t)$ ein Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung.

- Dann kann ein weiteres Fundamentalsystem $z_1(t), z_2(t), \ldots z_n(t)$ wie folgt erzeugt werden:

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(t) \cdot y_i(t),\ z_2(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(t) \cdot y_i(t),\ \ldots\ z_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(t) \cdot y_i(t)\ ,$$

  wobei die Koeffizienten a_{ji} einen Satz von n^2 Konstanten bilden.

- Dabei gilt: jedes $z_i(t)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, und das neue Fundamentalsystem ist ein Satz von n Lösungen, wenn für die rechts angegebene Determinante gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

2.3 Fundamentalsystem III

Beispiel:

Die Differentialgleichung einer harmonischen Bewegung lautet

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

- Ein möglicher Satz von Lösungen ist:

$$y_1 = \sin(\omega t), y_2 = \cos(\omega t).$$

- Ein anderes Fundamentalsystem ist:

$$z_1 = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) = e^{j\omega t}$$
$$z_2 = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) = e^{-j\omega t}$$

Komplexe Exponentialfunktion

2.3 Einfache Nullstellen

Sei $a_n = 1$. Die charakteristische Gleichung der Dgl. $\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = 0$ habe einfache Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Dann ist das Fundamentalsystem der zugehörigen Dgl. $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$ gegeben durch:

$$y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t}, y_2 = e^{\lambda_2 \cdot t}, \ \ldots\ , \ y_n = e^{\lambda_n \cdot t}.$$

Beispiel:

Die Dgl. $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$.

- Die Nullstellen liegen bei: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$
- Die Lösung ist: $y_1 = e^{-t}$ und $y_2 = e^{-2t}$.

2.3 Mehrfache Reelle und Komplexe Nullstellen

Wenn die charakteristische Gleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = 0$

mehrfache reelle Nullstellen hat, dann gibt es für jede Nullstelle λ_i der Vielfachheit n_i (d.h., n_i Nullstellen sind gleich λ_i) n_i linear unabhängige Lösungen der Dgl. vom Typ

$$e^{\lambda_i \cdot t}, te^{\lambda_i \cdot t}, \ \dots \ , \ t^{n_i - 1} e^{\lambda_i \cdot t}.$$

Wenn die charakteristische Gleichung *konjugiert komplexe* Nullstellen vom Typ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ hat, besteht das Fundamentalsystem aus Lösungen vom Typ

$$y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 \cdot t},$$
$$z_1 = e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t, \qquad z_2 = e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t.$$

Beispiel:

Die Dgl. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 1y = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

- Sie hat eine zweifache Nullstelle bei $\lambda = -1$. Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$y_1 = e^{-t} \text{ und } y_2 = t \cdot e^{-t}.$$

Gliederung

2.1 Systemgleichungen
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale
2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen
2.4 Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare zeitinvariante Dgln.
- **Homogene Lösung**
- **Partikuläre Lösung**
- **Spezielle Lösungsverfahren**
- **Beharrungsverhalten und dynamisches Verhalten**

2.5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2.6 Linearisierung
2.7 Hausaufgaben

2.4 Lösung einer gewöhnlichen linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei $$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u}{dt^j}$$

- a_i, b_j sind bekannte, konstante Koeffizienten.
- $u(t)$ ist das Eingangssignal und bekannt für $0 \leq t < +\infty$.
- $y(t)$ ist der unbekannte Ausgang und die gesuchte Lösung.
- Für physikalisch realisierbare Systeme gilt $m \leq n$.
- Es sind folgende Anfangsbedingungen gegeben:

$$u(0), \dot{u}(0), \ddot{u}(0), ..., \frac{d^{m-1}u(0)}{dt^{m-1}} \quad und \quad y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), ..., \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}.$$

Ein solches Problem nennt man auch ein **„Anfangswertproblem“.**

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ setzt sich grundsätzlich aus zwei Anteilen zusammen:

- Die *homogene* Lösung $y_h(t)$ ist die Reaktion auf Anfangsbedingungen für $u(t) = 0$.
- Die *partikuläre* Lösung $y_p(t)$ ist die Reaktion auf beliebige Eingangssignale $u(t)$.

2.4 Lösung der homogenen Differentialgleichung I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung wird auch als **„natürliche Antwort“** („*free response*“ oder „*natural response*“) bezeichnet.

- Diese Lösung erfüllt die Differentialgleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$
- Die Lösung $y_h(t)$ hängt nur von Anfangsbedingungen ab.

Beispiel:

gegeben sei $$\dot{y} + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = c$$

- Wie man durch direktes Einsetzen überprüfen kann, ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung gegeben durch $y_h(t) = c \cdot e^{-t}$.

2.4 Lösung der homogenen Differentialgleichung II

Beispiel:

gegeben sei $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$

- Die homogene Lösung ist: $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$
- Warum?

- Bestimmung der Konstanten:
- Woher?

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 - 2c_2 &= 1 \\ \hline \rightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 &= -1 \\ \Rightarrow \quad y_h(t) &= e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

2.4 Die spezielle Lösung I

Die **spezielle Lösung** (*partikuläre Lösung*, engl. „*forced response*“) einer Differentialgleichung ist die Lösung für $u(t) \neq 0$, wenn alle Anfangsbedingungen

$$y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), ..., \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} \stackrel{!}{=} 0 \quad und \quad u(0), \dot{u}(0), \ddot{u}(0), ..., \frac{d^{m-1}u(0)}{dt^{m-1}} \stackrel{!}{=} 0.$$

Die partikuläre Lösung hängt also nur vom Eingangssignal $u(t)$ ab.

Man kann zeigen, dass sie durch Multiplikation mit einer besonderen Funktion g(t) als sog. „**Faltungsintegral**“ geschrieben werden kann.

$$y_p(t) = \int_0^t g(t-\tau) \left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(\tau)}{d\tau^i} \right] d\tau$$

Dabei wird die Funktion $g(t-\tau)$ als sog. „**Gewichtsfunktion**“ der Differentialgleichung bezeichnet (äq. „**Impulsantwort**“, siehe nächste Woche).

2.4 Die spezielle Lösung II

Die Gewichtsfunktion $g(t)$ einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann geschrieben werden als

$$g(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} d_i y_i(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

- wobei d_1, d_2, ... d_n Konstanten sind und $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... $y_n(t)$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden.

- Man beachte, dass $g(t)$ eigentlich eine natürliche Antwort der Differentialgleichung ist und deshalb n Anfangsbedingungen zur kompletten Spezifikation benötigt.
- Diese sind gegeben durch

$$g(0) = 0, \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = 0, ..., \left.\frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} = 0, \left.\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = 1.$$

- Mit diesen Anfangsbedingungen können die Konstanten d_1, , d_2, , ... d_n bestimmt werden.

2.4 Beispiel zur Gewichtsfunktion

Gegeben sei die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$

- Fundamentalsystem: $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = e^{-2t}$
- Gewichtsfunktion: $g(t) = d_1 e^{-t} + d_2 e^{-2t}$
- Bestimmung von d_1, d_2: $g(0) = 0 = d_1 + d_2, \quad \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = 1 = -d_1 - 2d_2$
- Die Gewichtsfunktion lautet: $\rightarrow \quad g(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Sei $u(t) = 1(t) = \sigma(t)$

$$\rightarrow \quad y_p(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t \left[e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right] d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau - e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau = \frac{1}{2}\cdot\left[1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right]$$

2.4 Die allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung, d.h. die **„Systemantwort“,** setzt sich aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen (Superpositionsprinzip)

$$y_{ges}(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Beispiel:

Gegeben sei wieder

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \sigma(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung?

$$y_{ges}(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left[e^{-t} - e^{-2t}\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - e^{-2t}\right]$$

2.4 Spezielle Lösungsverfahren

Weitere Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

1. Variation der Konstanten („*klassisch*“, siehe HöMa 2)
2. Ansatz vom Typ der Rechten Seite („*klassisch*“, siehe HöMa 2)
3. Laplace-Transformation (nächste Stunde)

2.4 Variation der Konstanten I

Beispiel:

Gegeben sei eine Dgl. erster Ordnung $\dot{y}(t) + ay(t) = t$.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Lösung:

- Homogene Lösung:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(t) = K \cdot e^{-at}$$

- Variation der Konstanten:

$$y_{ges}(t) = K(t) \cdot e^{-at} \;\Rightarrow\; \dot{y}_{ges}(t) = \dot{K}(t) \cdot e^{-at} - a \cdot K(t) \cdot e^{-at}$$

- Einsetzen der Lösung:

$$\dot{K}(t) \cdot e^{-at} - a \cdot K(t) \cdot e^{-at} + a \cdot K(t) \cdot e^{-at} = t$$

$$\Rightarrow \dot{K}(t) = t \cdot e^{at}$$

$$\Rightarrow K(t) - K(0) = \int_0^t \tau \cdot e^{a\tau} d\tau$$

2.4 Variation der Konstanten II

- Partielle Integration liefert:

$$\int_0^t \tau \cdot e^{a\tau} d\tau = \frac{1}{a} \cdot t \cdot e^{at} - \frac{1}{a} \int_0^t 1 \cdot e^{a\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{a} \cdot t \cdot e^{at} - \frac{1}{a^2} \left(e^{at} - 1\right)$$

- Damit ergibt sich:

$$K(t) = K(0) + \int_0^t \tau \cdot e^{a\tau} d\tau = K(0) + \frac{1}{a} \cdot t \cdot e^{at} - \frac{1}{a^2} \left(e^{at} - 1\right)$$

und

$$y_{ges}(t) = K(t) \cdot e^{-at} = \underbrace{K(0) \cdot e^{-at}}_{y_h(t)} + \underbrace{\frac{1}{a} \cdot t - \frac{1}{a^2} \left(1 - e^{-at}\right)}_{y_p(t)}.$$

Probe:

$$\dot{y}(t) = (-a) \cdot K(0) \cdot e^{-at} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-at}$$

$$\dot{y}(t) + ay(t) = t \quad \Rightarrow$$

$$(-a) \cdot K(0) \cdot e^{-at} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-at} + a \cdot \left(K(0) \cdot e^{-at} + \frac{1}{a} \cdot t - \frac{1}{a^2} \left(1 - e^{-at}\right) \right) = t \quad \text{q.e.d.}$$

2.4 Ansatz vom Typ der Rechten Seite

Beispiel:

Gegeben sei eine Dgl. erster Ordnung $\dot{y}(t) + ay(t) = t$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Lösung:

- Homogene Lösung: $\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(t) = K \cdot e^{-at}$
- Ansatz vom „Typ der Rechten Seite“:

$$y_p(t) = A \cdot t + B \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_p(t) = A$$

- Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = A + a \cdot (A \cdot t + B) = t$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} a \cdot A &= 1 \\ A + a \cdot B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = \frac{1}{a} \cdot t - \frac{1}{a^2}$$

2.4 Stationäres und dynamisches Verhalten

Definition:

- Das stationäre Verhalten (Beharrungsverhalten, engl. ***„steady state response“***) ist derjenige Anteil der Systemantwort, der bei konstanter Anregung nicht verschwindet, wenn $t \to \infty$.
- Das dynamische Verhalten (engl. **„transient response“**) ist derjenige Anteil der Systemantwort, der bei konstanter Anregung für $t \to \infty$ verschwindet.

Beispiel:

Gegeben sei: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = \sigma(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1$

- Systemantwort:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{y_{ss}} \underbrace{- \frac{1}{2}e^{-2t}}_{y_{trans}}$$

Gliederung

2.1 Systemgleichungen
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale
2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen
2.4 Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare zeitinvariante Dgln.
2.5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2.6 Linearisierung
2.7 Hausaufgaben

2.5 Systeme zweiter Ordnung I

Merke: Lineare Systeme zweiter Ordnung sind eine besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen, da sich Systeme höherer Ordnung häufig durch Systeme zweiter Ordnung approximieren lassen.

Gegeben sei die folgende Dgl. zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 u$$

Definitionen:

- ω_0 ist die **„Eigenfrequenz“** des ungedämpften Systems.
- D ist der einheitslose **„Dämpfungsgrad“.**

2.5 Systeme zweiter Ordnung II

Nimmt man $0 \leq D \leq 1$ an, so ist die charakteristische Gleichung gegeben durch

$$\lambda^2 + 2D\omega_0\lambda + \omega_0^2 \stackrel{!}{=} 0 = \left(\lambda + D\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-D^2}\right) \cdot \left(\lambda + D\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-D^2}\right)$$

- Die Nullstellen liegen bei $\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-D^2} = -\alpha \pm j\omega_d$,

  wobei $\alpha = D\omega_0$ als **„relative Dämpfung“** oder **„Abklingkonstante“**

  und $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ als **„gedämpfte natürliche Frequenz“** bezeichnet wird.

- $\tau = 1/\alpha = \dfrac{1}{D\omega_0}$ ist die **„Zeitkonstante“** des Systems.

2.5 Systeme zweiter Ordnung III

Man kann zeigen, dass die Gewichtsfunktion durch

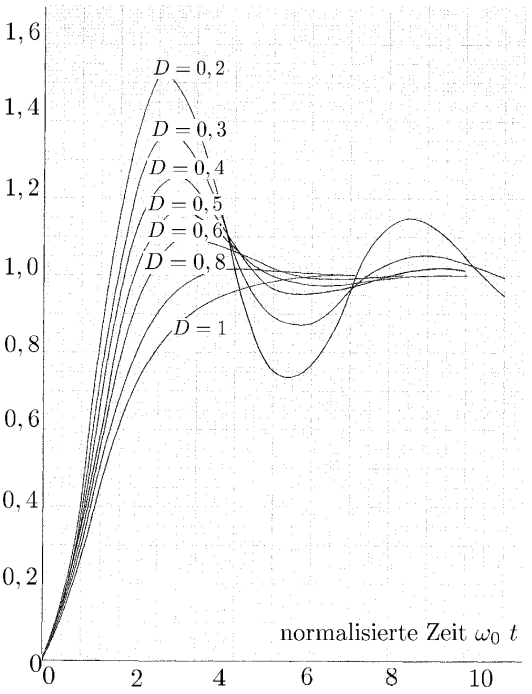
$$g(t) = \frac{1}{\omega_d} \cdot c^{-\alpha t} \cdot \sin\omega_d t$$

gegeben ist. Daraus ergibt sich Sprungantwort durch Faltung gemäß

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot \omega_0^2 \cdot u(\tau)\, d\tau$$
$$= 1 - \frac{\omega_0}{\omega_d} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_d t + \phi)$$

mit

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right)$$



Gliederung

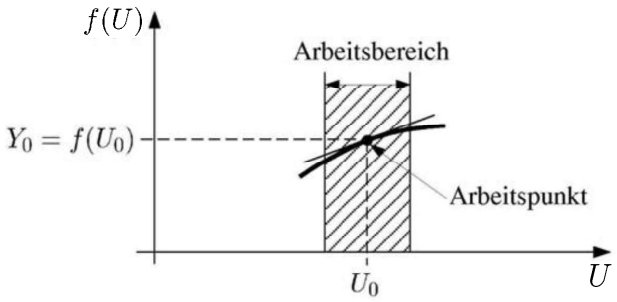
2.1 Systemgleichungen
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale
2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen
2.4 Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare zeitinvariante Dgln.
2.5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2.6 Linearisierung
2.7 Hausaufgaben

2.6 Linearisierung nichtlinearer Funktionen

Zunächst Linearisierung im Arbeitspunkt bei statischen Funktionen

Gegeben sei eine Funktion:

$$Y = f(U)$$



Taylor-Entwicklung:

$$Y = f(U) = f(U_0) + \left.\frac{df}{dU}\right|_{U=U_0} (U - U_0) + \left.\frac{d^2 f}{dU^2}\right|_{U=U_0} \cdot \frac{(U-U_0)^2}{2} + \cdots$$

$$\approx f(U_0) + \left.\frac{df}{dU}\right|_{U=U_0} (U - U_0) = Y_0 + m \cdot (U - U_0)$$

2.6 Linearisierung nichtlinearer Differentialgleichungen

Enthält der mathematische Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße eines Systems eine oder mehrere veränderliche Größen

$$f(X(t), Y(t), Z(t), \dot{X}(t), \dots) = 0,$$

so erfolgt eine Linearisierung der nichtlinearen Systemdifferentialgleichung durch Berechnung des „*vollständigen Differentials*“ am Arbeitspunkt AP mit $AP = (X_0, Y_0, Z_0, \dot{X}_0, \dot{Y}_0, \cdots)$:

$$\Delta f(X(t), Y(t), \dots) =$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{AP} \cdot \Delta X + \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{AP} \cdot \Delta Y + \left.\frac{\partial f}{\partial Z}\right|_{AP} \cdot \Delta Z + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{X}}\right|_{AP} \cdot \Delta \dot{X} + \cdots = 0$$

Merke: die Funktion $f(x(t), y(t), z(t), \dots)$ ist nach allen arbeitspunkt-abhängigen Variablen inkl. aller zeitlichen Ableitungen zu differenzieren.

2.6 Beispiel nichtlineare Dgl. I

Beispiel:

Linearisierung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$A_1 \dot{Y}(t) + A_2 \sqrt{Y(t)} = B_1 U^2(t)$$

mit $U(t)$ als Eingangsgröße und $Y(t)$ als Ausgangsgröße.
Umstellen der Differentialgleichung liefert

$$f[Y(t), \dot{Y}(t), U(t)] = A_1 \dot{Y}(t) + A_2 \sqrt{Y(t)} - B_1 U^2(t) = 0$$

1. **Schritt:** Bestimmung des stationären Arbeitspunktes $(Y_0,\ U_0)$.
   Beachte: In einem stationären Arbeitspunkt (AP) ist die zeitliche Änderung der Signale gleich null. Somit folgt:

$$\dot{Y}|_{AP} = 0,\ Y|_{AP} = Y_0 \quad und \quad U|_{AP} = U_0$$

2.6 Beispiel nichtlineare Dgl. II

Stationär gilt für die Differentialgleichung im Arbeitspunkt:

$$f(Y_0, U_0) = A_2\sqrt{Y_0} - B_1 U_0^2 = 0$$

Umformen führt auf:

$$Y_0 = \left(\frac{B_1}{A_2} U_0^2\right)^2$$

2. **Schritt:** Einführen **kleiner Änderungen** vom Arbeitspunkt

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t) - Y_0 = \Delta Y(t) \\ \dot{y}(t) &= \dot{Y}(t) - \dot{Y}_0 = \Delta\dot{Y}(t) \\ u(t) &= U(t) - U_0 = \Delta U(t) \end{aligned}$$

2.6 Beispiel nichtlineare Dgl. III

3. **Schritt:** Linearisieren der Differentialgleichung durch Bilden des vollständigen Differentials

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{Y}}\right|_{AP} \cdot \dot{y}(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{AP} \cdot y(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_{AP} \cdot u(t) = 0$$

Daraus folgt:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{Y}}\right|_{AP} = A_1; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{AP} = \left.\frac{\partial (A_2 Y^{\frac{1}{2}})}{\partial Y}\right|_{AP} = \frac{1}{2} A_2 Y_0^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{A_2}{2\sqrt{Y_0}} = \frac{1}{2} A_2 \left(\frac{B_1}{A_2} U_0^2\right)^{-1} = \frac{A_2^2}{2B_1 \cdot U_0^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_{AP} = -2B_1 \cdot U_0$$

Somit folgt für die linearisierte Differentialgleichung:

$$A_1 \cdot \dot{y}(t) + \frac{A_2^2}{2B_1 \cdot U_0^2} \cdot y(t) = 2B_1 \cdot U_0 \cdot u(t)$$

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.1 Systemgleichungen
2.2 Spezielle Eingangs- und Testsignale
2.3 Klassifizierung von Differentialgleichungen
2.4 Lösungsverfahren für gewöhnliche lineare zeitinvariante Dgln.
2.5 Differentialgleichungen zweiter Ordnung
2.6 Linearisierung
2.7 Hausaufgaben

2.7 Hausaufgabe

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lesen Sie dieses Kapitel im Skript.

Zur Wiederholung:

Frischen Sie Ihre Kenntnisse über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und zugehörige Lösungsverfahren auf.

3. Die (einseitige) Laplace-Transformation

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

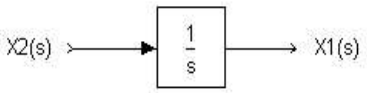
Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.1 Einführung
3.2 Definition und Eigenschaften der Laplace-Transformation
3.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation
3.4 Blockdiagramme und Übertragungsfunktionen
3.5 Hausaufgaben



Pierre-Simon Laplace (1749-1827): Französischer Mathematiker, Astronom und Physiker

http://www.intmath.com/Laplace-transformation/laplace_sm.jpg

3.1 Einleitung: was ist eine Integraltransformation?

Eine **Integraltransformation** ist eine **Abbildung** der Form

$$Tf(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,u) f(t) dt$$

- Der Eingang ist eine Funktion $f(t)$, und das Ergebnis ist eine Funktion $Tf(u)$.
- Die verschiedenen Integraltransformationen unterscheiden sich durch den Integralkern $K(t,u)$ (engl. ***kernel function*** oder ***nucleus***).

Motivation:

- Manche Problemklassen sind in ihrer ursprünglichen Formulierung schwer zu lösen.
- Die „Abbildung“ eines Problems aus dem Originalbereich (i.d.R. Zeitbereich) in einen Bildbereich erlaubt häufig einfachere Umformungen und einen einfacheren Zugang zu einer Lösung.
- Diese muss dann mit Hilfe der **Inversen Integraltransformation** zurück in den Zeitbereich transformiert werden

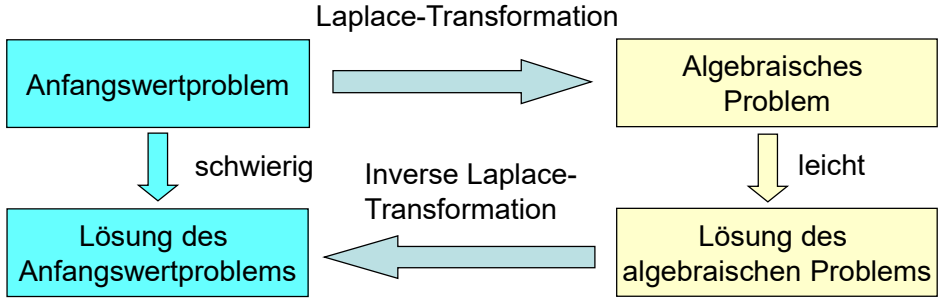
$$f(t) = \int_{u_1}^{u_2} K^{-1}(u,t)(Tf(u))du$$

3.1 Wozu brauchen wir die Laplace-Transformation?

Die **Laplace-Transformation** ist eine Integraltransformation und ein mächtiges Werkzeug zur Lösung von Anfangswertproblemen.

Vorgehensweise:

- Man transformiere ein kompliziertes Differentialgleichungs-Problem in ein viel einfacheres algebraisches Problem im Frequenzbereich.
- Man löse das algebraische Problem.
- Anschließend kann das Problem durch die **Inverse Laplace-Transformation** gelöst werden.



3.1 Definition der Laplace-Transformation

Definition:

- Die einseitige **Laplace-Transformation** ist definiert durch

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

wobei $s = \delta + j\omega$ eine beliebige komplexe Zahl und $f(t)$ eine beliebige, aber beschränkte Zeitfunktion sind.

Weiterhin gilt $f(t) = 0 \text{ für } t < 0$. Wichtiger Unterschied zur Fourier-Transformation!

- Die **Laplace-Rücktransformation** (engl. *Inverse Laplace-Transformation*) ist definiert durch

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = f(t) \cdot \sigma(t),$$

wobei $\sigma(t)$ die Sprungfunktion ist (engl. *unit step*).

- Ein häufig benutztes Symbol ist: Zeitbereich ○—● Frequenzbereich

3.1 Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation

Nr.	$x(t)$ für $t \geq 0$	$X(s)$
1 Delta	$\delta(t)$	1
2 Sprung	$\sigma(t) = 1(t)$	$\frac{1}{s}$
3 Rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
4 Potenzfunktion	t^n	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$
5	e^{-at}; a beliebig	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$; $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

3.1 Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation

Nr.	$x(t)$ für $t \geq 0$	$X(s)$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
11	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
12	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
13	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$1-\frac{1}{\sqrt{1-D^2}}e^{-D\omega_0 t}\sin(\omega t+\varphi)$ $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}$ $\omega=\omega_0\sqrt{1-D^2}$	$\frac{1}{s\left\{1+2D\frac{s}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}\right\}}$ $D<1$

Gliederung

3.1 Einführung
3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation
3.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation
3.4 Blockdiagramme und Übertragungsfunktionen
3.5 Hausaufgaben

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. **Linearitätseigenschaft:** Die Laplace-Transformation ist eine **lineare** Integraltransformation. Daher gilt das Superpositionsprinzip.

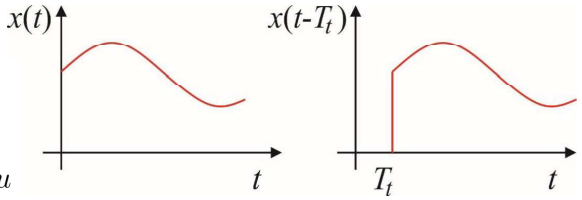
$$\mathscr{L}[a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] = a \cdot \mathscr{L}[x_1(t)] + b \cdot \mathscr{L}[x_2(t)]$$

   - Die Reihenfolge von Addition und Integration ist vertauschbar. Das bedeutet:

$$b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad b_1 F_1(s) + b_2 F_2(s)$$

2. **Verschiebungssatz** (im Zeitbereich): Verschiebung um eine „Totzeit“ T_t, mit $u = t - T_t$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x(t-T_t)] &= \int_{T_t}^{\infty} x(t-T_t) \cdot e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} x(u) \cdot e^{-s(u+T_t)}\, du \\ &= e^{-sT_t} \cdot \int_0^{\infty} x(u) e^{-su}\, du \\ &= e^{-sT_t} \cdot \mathscr{L}[x(t)]\end{aligned}$$



3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

3. **Dämpfungssatz:** Verschiebung im Bildbereich.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[x(t)e^{-at}\right] &= \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-at} \cdot e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-(s+a)t}\, dt \\ &= X(s+a)\end{aligned}$$

4. **Ähnlichkeitssatz:** Die Kurvenbilder werden in einem gewissen Ähnlichkeitsverhältnis verformt.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[x(at)\right] &= \int_0^{\infty} x(at) \cdot e^{-st}\, dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x(u) \cdot e^{-\frac{s}{a}u}\, du = \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

5. Differentiationssatz:

- sei $x(t)$ eine stetige und differenzierbare Funktion für $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t)\cdot e^{-st}\,dt \\ &= x(t)\cdot e^{-st}\Big|_0^\infty - (-s)\cdot\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt \\ &= -x(0) + s\cdot\mathscr{L}[x(t)]\end{aligned}$$

- Gelten die oben genannten Voraussetzungen auch für die (n-1)-te Ableitung der Funktion $x(t)$, so lässt sich der Differentiationssatz verallgemeinern zu

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = -x^{(n-1)}(0) + s\cdot\mathscr{L}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t)\right]$$

(n-1)-te Ableitung für $t = 0$

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation IV

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] &= s^n\mathscr{L}[x(t)] - s^{n-1}x(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0) \\ &= s^n\mathscr{L}[x(t)] - \sum_{\nu=0}^{n-1} s^\nu x^{(n-1-\nu)}(0) \\ &= s^n X(s) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s^\nu x^{(n-1-\nu)}(0)\end{aligned}$$

- Merke: die Laplace-Transformierte der n-ten Ableitung einer Funktion $x(t)$ lässt sich somit auf die Laplace-Transformierte der Funktion selbst und deren Anfangsbedingungen $x^{(i)}(0)$, $i = 0, \ldots, n-1$ zurückführen.

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation V

Sonderfall des Differentiationssatzes:

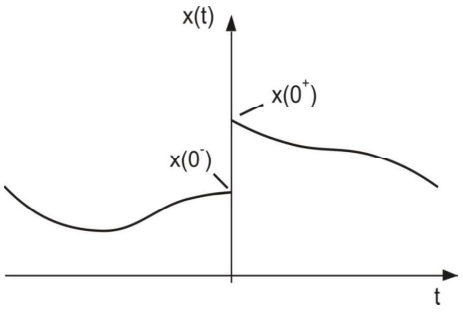
Betrachtung von Funktionen, die im Ursprung unstetig sind …

- Die Funktion $x(t)$ habe für $t = 0$ eine Unstetigkeitsstelle mit den links- und rechtsseitigen Grenzwerten

$$x(0^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} x(0+\varepsilon)$$
$$x(0^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} x(0-\varepsilon)$$

- Weiterhin habe die Funktion eine Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[x(t)]$ und es gilt

$$x(t) = x_c(t) + \underbrace{\sigma(t) \cdot \left(x(0^+) - x(0^-)\right)}_{x^*(t)}.$$



Quelle: R. Isermann, Skriptum „Regelungstechnik I", © TU Darmstadt

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation VI

Für die Ableitung der Funktion $x(t)$ gilt dann

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}_c(t) + [x(0^+) - x(0^-)] \cdot \delta(t)$$

- Dabei ist $\dot{x}_c(t)$ die Ableitung der „Restfunktion" $x_c(t)$, die bis auf die Unstetigkeitsstelle definiert ist, d.h. $x(t) = x_c(t) + \sigma(t)(x(0^+) - x(0^-))$.
- Speziell an der Unstetigkeitsstelle ist die Ableitung des unstetigen Anteils $x^*(t)$ der Funktion $x(t)$ durch folgenden Differenzenquotienten definiert:

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(0) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - x\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} \\ &= [x(0^+) - x(0^-)] \cdot \delta(t)\end{aligned}$$

- Die Laplace-Transformierte von $\dot{x}_c(t)$ wird gemäß

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}x_c(t)\right] = -x_c(0) + s \cdot \mathscr{L}[x_c(t)]$$

gebildet, wobei der rechtsseitige Grenzwert aus dem Inneren des Integrationsbereichs verwendet werden muss.

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation VI

Für die Laplace-Transformierte der gesamten Funktion $x(t)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] &= \mathscr{L}\left[\dot{x}_c(t)\right] + \mathscr{L}\left[\left[x(0^+) - x(0^-)\right]\cdot\delta(t)\right] \\ &= s\cdot X(s) - x(0^+) + \left[x(0^+) - x(0^-)\right]\cdot 1 \\ &= s\cdot X(s) - x(0^-)\end{aligned}$$

- Merke: bei Unstetigkeit im Ursprung muss der **linksseitige Grenzwert** verwendet werden. Diese Ergebnis schließt den Sonderfall stetiger Funktionen ein, da für diese grundsätzlich $x(0^+) = x(0^-) = x(0)$ ist.
- Tritt die Unstetigkeit nicht in der Funktion $x(t)$ selbst, sondern erst in deren (n−1)-ter Ableitung auf, so gilt für die Laplace-Transformierte der n-ten Ableitung in Anlehnung an die Gleichung

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n X(s) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s^\nu x^{(n-1-\nu)}(0^-)$$

- Alle anderen Anfangsbedingungen bleiben unverändert, da die Ableitungen bis zur (n-2)-ten Ableitung an der Stelle $(t=0)$ stetig verlaufen.

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation VII

6. Integrationssatz:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right] &= \int_0^\infty \int_0^t x(\tau)\,d\tau\cdot e^{-st}\,dt \\ &= -\frac{1}{s}\int_0^t x(\tau)\,d\tau\cdot e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt \\ &= \frac{1}{s}\mathscr{L}\left[x(t)\right]\end{aligned}$$

7. Faltungssatz: Die Laplace-Transformierte einer Funktion $x_3(t)$ sei als Produkt zweier Laplace-Transformierter gegeben.

$$\mathscr{L}\left[x_3(t)\right] = \int_0^\infty x_3(t)\cdot e^{-st}\,dt = X_1(s)\cdot X_2(s) = X_3(s)$$

- Die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ seien bekannt.

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation VII

Gesucht ist die der Multiplikation im Bildbereich entsprechende Rechenoperation im Originalbereich.

$$\mathscr{L}\left[x_3(t)\right] = X_1(s) \cdot X_2(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} x_1(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau \int_{u=0}^{\infty} x_2(u) e^{-su}\, du$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} x_1(\tau) x_2(u) e^{-s(\tau+u)}\, du\, d\tau$$

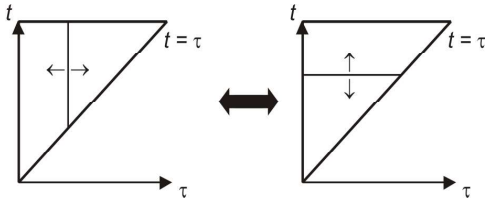
- Substituiere $t = \tau + u$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{t=\tau}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) e^{-st}\, dt\, d\tau$$

- Vertausche Reihenfolge der Integration

$$= \int_{t=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{t} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} x_3(t) \cdot e^{-st}\, dt$$



Quelle: R. Isermann, Skriptum „Regelungstechnik I", © TU Darmstadt

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation VIII

- Die Originalfunktion $x_3(t)$ hängt somit über das Faltungsintegral mit den Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zusammen

$$x_3(t) = \int_0^t x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau = x_1(t) * x_2(t)$$

- Die Faltung wird vielfach mit dem Operator "$*$" abgekürzt.

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation IX

RWTH AACHEN UNIVERSITY

8. Grenzwertsätze

- Aus der allgemeinen Form des Differentiationssatzes lassen sich einfache Formeln zur Bestimmung der Anfangs- und Endwerte bzw. -steigungen einer Funktion $x(t)$ aus der zugehörigen Laplace-Transformierten $\mathscr{L}[x(t)]$ ableiten.

- Wichtige Voraussetzung für die Anwendung dieser Formeln ist die Existenz der gesuchten Grenzwerte.

- Sei wieder $x(t) = x_c(t) + \sigma(t)(x(0^+) - x(0^-))$.

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation X

RWTH AACHEN UNIVERSITY

8.1 Anfangswert

- Aus

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}\,dt = -x(0^-) + s\cdot\mathscr{L}[x(t)]$$

- Wegen $s = \delta + j\omega$ ergibt sich für den Grenzfall $\delta \to \infty$ (unendliche Konvergenzabszisse) für die Dämpfungsfunktion

$$\lim_{\delta\to\infty} e^{-st} = \begin{cases} 1 & \text{for } t = 0 \\ 0 & \text{for } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta\to\infty}\int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}\frac{d}{dt}x(t)\cdot 1\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}\frac{d}{dt}x_c(t)\,dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}[x(0^+) - x(0^-)]\delta(t)\,dt$$

$$= x(0^+) - x(0^-)$$

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation XI

RWTH AACHEN UNIVERSITY

- Da der Imaginärteil des Laplace-Operators beim Grenzübergang keinen Einfluss mehr auf die Dämpfungsfunktion hat, ist $\delta \to \infty$ gleichbedeutend mit $s \to \infty$.

$$\begin{aligned} x(0^+) &= \lim_{\delta \to \infty} s \cdot \mathscr{L}[x(t)] \\ &= \lim_{s \to \infty} s \cdot \mathscr{L}[x(t)] \\ &= \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s) \end{aligned}$$

8.2 Anfangssteigung

- Die Laplace-Transformierte der zweiten Ableitung einer für $t = 0$ stetigen Funktion $x(t)$ ist gegeben durch

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}x(t)e^{-st}\,dt \qquad = -\dot{x}(0^-) - sx(0^-) + s^2\mathscr{L}[x(t)]$$

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation XII

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Für den Sonderfall der unendlichen Konvergenzabszisse $(\delta \to \infty \;\Rightarrow\; s \to \infty)$ geht der Integralterm über in

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{d^2}{dt^2}x(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \{\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)\}\,\delta(t)\,dt \qquad = \dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-)$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen ergibt sich die Anfangssteigung

$$\dot{x}(0^+) = \lim_{s \to \infty} -sx(0^-) + s^2 \cdot \mathscr{L}[x(t)]$$

Erweiterung auf im Ursprung unstetige Funktionen.

- Bei der Herleitung der obigen Beziehung wurde vorausgesetzt, dass die Funktion $x(t)$ an der Stelle $t = 0$ stetig verläuft. Dies war notwendig, um zu garantieren, dass die erste Ableitung von $x(t)$ für $t = 0$ endlich bleibt und die zweite Ableitung wenigstens durch einen δ -Impuls beschrieben werden kann.

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation XIII

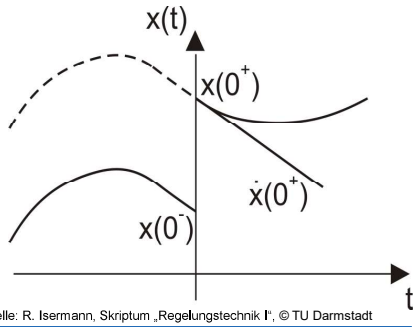
Durch einen einfachen Trick lässt sich die Formel zur Bestimmung der Anfangssteigung auf unstetige Funktionen anwenden:

- Ersetzt man den Anfangswert $x(0^-)$ durch $x(0^+)$, so entspricht dies einer Verschiebung von $x(t)$ für $t = 0$ in der unten dargestellten Weise.
- Die Funktion $x(t)$ wird dadurch für $t = 0$ stetig. Offensichtlich hat diese Verschiebung keinerlei Konsequenzen für die Berechnung der Laplace-Transformierten der Anfangssteigung.
- Die Anfangssteigung ergibt sich somit aus der leicht modifizierten Formel

$$\dot{x}(0^+) = \lim_{s\to\infty} \left(-sx(0^+) + s^2 \cdot \mathscr{L}\left[x(t)\right]\right)$$

Merke: Bei im Ursprung unstetigen Funktionen gilt:

- Differentiationssatz: benutze linksseitige Grenzwerte
- Grenzwertsätze: benutze rechtsseitige Grenzwerte



Quelle: R. Isermann, Skriptum „Regelungstechnik I", © TU Darmstadt

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation XIV

8.3 Endwertsatz

- Ausgangspunkt für die Herleitung des Endwertsatzes ist wieder die Laplace-Transformierte der ersten Ableitung eines Signals $x(t)$, für die allgemein gilt

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}\,dt = -x(0^-) + s\cdot\mathscr{L}\left[x(t)\right]$$

- Für den Grenzübergang $s \to 0$ vereinfacht sich die Dämpfungsfunktion zu

$$\lim_{s\to 0} e^{-st} = 1$$

- Damit ergibt sich

$$\lim_{s\to 0}\ \mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t)\,dt = x(\infty) - x(0^-)$$

$$\Rightarrow \quad x(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s\mathscr{L}\left[x(t)\right]\right) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation XV

RWTH AACHEN UNIVERSITY

8.4 Endsteigung

- Ausgehend von der Laplace-Transformierten der zweiten Ableitung eines Signals $x(t)$ lässt sich völlig analog zum Endwertsatz eine einfache Formel zur Bestimmung der Endsteigung ableiten.

$$\begin{aligned}\dot{x}(\infty) &= \lim_{s\to 0}\left(s^2\mathscr{L}\left[x(t)\right]\right)\\ &= \lim_{s\to 0} s^2 X(s)\end{aligned}$$

3.2 Beispiele zu den Grenzwertsätzen I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0\\ e^{-at} & \text{für } t\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\left[x(t)\right] = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt = \frac{1}{s+a}$$

   - (Vgl. Korrespondenztabelle, S. 7, Nr. 5 …)

- Anfangswert $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\left[x(t)\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+a} = 1$
- Anfangssteigung $\dot{x}(0^+) = \lim_{s\to\infty} s[s\mathscr{L}\left[x(t)\right] - x(0^+)] = \lim_{s\to\infty} s\left\{\frac{s}{s+a} - 1\right\}$

$$= \lim_{s\to\infty}\frac{-as}{s+a} = -a$$

- Endwert $x(\infty) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a} = 0$

3.2 Beispiele zu den Grenzwertsätzen II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

2. Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = \sin \omega t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = 0$$

$$x(\infty) \stackrel{?}{=} \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = 0?$$

Falsch! Dieser Limes existiert nicht!

Merke: Nutze die Grenzwertsätze mit Augenmaß. Der Limes muss existieren …

3.2 Zusammenfassung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Nr.	Theorem		Name
1.	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$	$= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definition
2.	$\mathscr{L}[kf(t)]$	$= kF(s)$	Linearität
3.	$\mathscr{L}[f_1(t) + f_2(t)]$	$= F_1(s) + F_2(s)$	Linearität
4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)]$	$= F(s + a)$	Dämpfungssatz
5.	$\mathscr{L}[f(t - T_t)]$	$= e^{-sT_t}F(s)$	Verschiebungssatz
6.	$\mathscr{L}[f(at)]$	$= \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$	Ähnlichkeitssatz
7.	$\mathscr{L}[\frac{df}{dt}]$	$= sF(s) - f(0^-)$	Differentiationssatz
8.	$\mathscr{L}[\frac{d^2f}{dt^2}]$	$= s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$	Differentiationssatz

3.2 Zusammenfassung

Beachte:

- Zu 11.) um das richtige Ergebnis zu erhalten, müssen hier alle Nullstellen des Nenners von $F(s)$ negative Realteile haben und maximal eine darf im Ursprung liegen.
- Zu 12.) dieser Satz gilt nur, wenn die Funktion $f(t)$ stetig ist oder maximal eine sprungförmige Unstetigkeitsstelle bei $t = 0$ hat (d.h. keinen δ -Impuls oder eine Ableitungen davon im Ursprung).

Nr.	Theorem		Name
9.	$\mathscr{L}[\frac{d^n f}{dt^n}]$	$= s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{k-1}(0^-)$	Differentiationssatz
10.	$\mathscr{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right]$	$= \frac{F(s)}{s}$	Integrationssatz
11.	$f(\infty)$	$= \lim_{s\to 0} sF(s)$	Endwert
12.	$f(0^+)$	$= \lim_{s\to \infty} sF(s)$	Anfangswert

Gliederung

3.1 Einführung
3.2 Definition und Eigenschaften der Laplace-Transformation
3.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation
3.4 Blockdiagramme und Übertragungsfunktionen
3.5 Hausaufgaben

3.3 Lösung von Differentialgleichungen I

Gegeben sei die folgende Dgl., inkl. der folgenden Anfangsbedingungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = u \qquad \left.\frac{d^i y}{dt^i}\right|_{t=0^-} = y^{(i)}(0) \quad \forall \quad i = 1, ..., n-1$$

Laplace-Transformation ergibt

$$\sum_{i=0}^{n} \left[a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0) \right) \right] = U(s)$$

Auflösen nach $Y(s)$ ergibt

$$Y(s) = \frac{U(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y^{(k)}(0)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

- Der erste Term entspricht der partikulären Lösung (*forced response*) -> Reaktion auf Eingangssignal $U(s)$.
- Der zweite Term entspricht der homogenen Lösung (*free response = natural response*) → Reaktion auf Anfangsbedingungen.

3.3 Beispiel

Aufgabe: Finden Sie $Y(s)$ für

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \sigma(t)$$

- Gegeben: $n = 2,\ y(0) = -1,\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t|_{t=0} = 2$

Lösung: $\left(s^2 Y(s) - (-1)s - 2\right) + 3 \cdot \left(sY(s) - (-1)\right) + 2Y(s) = \frac{1}{s}$

Anmerkung: an diesem Beispiel kann man die *„Schönheit der Lösung von Differentialgleichungen mit der Laplace-Transformation“* studieren → sowohl Signale als auch Anfangsbedingungen und Differentialoperatoren führen auf Polynome in s

$$\rightarrow \quad Y(s) \cdot \left(s^2 + 3s + 2\right) = \frac{1}{s} - (s+1)$$

$$\rightarrow \quad Y(s) = \frac{-(s^2 + s - 1)}{s \cdot (s^2 + 3s + 2)}$$

3.3 Lösung von Differentialgleichungen II

Gegeben sei folgende lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u}{dt^j}$$

Die zugehörige Laplace-Transformation lautet:

$$\sum_{i=0}^{n} \left[a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0) \right) \right] = \sum_{j=0}^{m} \left[b_j \left(s^j U(s) - \sum_{k=0}^{j-1} s^{j-1-k} u^{(k)}(0) \right) \right],$$

wobei $u^{(k)}(0)$ die k–te Ableitung zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

Die Lösung im Laplace-Bereich ist

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \cdot U(s) - \frac{\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j-1} b_j s^{j-1-k} u^{(k)}(0)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y^{(k)}(0)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

3.3 Beispiel

Aufgabe: Finden Sie $Y(s)$ für

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 3u$$

- gegeben: $u(t) = e^{-4t}$ und $y(0) = 1,\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t|_{t=0} = 0,\ u(0) = 1$

Lösung: (Zwischenschritte à vous)

- Weitere Angaben: $m = 1, n = 2, a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1, b_0 = 3, b_1 = 1$

$$\rightarrow \quad Y(s) = \underbrace{\left(\frac{s+3}{s^2+3s+2} \right) \cdot \left(\frac{1}{s+4} \right)}_{\text{Partikuläre Lösung}} + \underbrace{\frac{s+3}{s^2+3s+2} - \frac{1}{s^2+3s+2}}_{\text{Homogene Lösung}}$$

Beachte: im Laplace-Bereich sind dies alles Polynome

3.3 Inverse Laplace-Transformation

Bei der Analyse linearer, zeitinvarianter Systeme mit konstanten Koeffizienten inkl. Anfangsbedingungen und linearer Anregungsfunktion $u(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation ergeben sich stets gebrochen-rationale Bildfunktionen (siehe Beispiel)

$$\rightarrow \quad Y(s) = \left(\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s+4}\right) + \frac{s+3}{s^2+3s+2} - \frac{1}{s^2+3s+2}$$
$$= \frac{B_1(s)}{A_1(s)} + \frac{B_2(s)}{A_2(s)} + \frac{B_3(s)}{A_3(s)}$$

Frage:

- Wie berechnet man die Laplace-Rücktransformation $y(t)$?

$$y(t) \cdot \sigma(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

3.3 Inverse Laplace-Transformation II

Allgemein: Gegeben ist eine gebrochen-rationale Funktion der Ordnung n im Laplace-Bereich

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n}, \; m \leq n$$

Das Nennerpolynom $N(s)$ lässt sich nach dem Hauptsatz der Algebra in die Produktform überführen.

$$N(s) = (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i)$$

Die Nullstellen s_i von $N(s)$ werden als „*Pole*“ oder „*Polstellen*“ bezeichnet.

Es gibt insg. 3 Möglichkeiten, um die Rücktransformation zu berechnen:

1. Rückführung auf tabellierte Funktionen – Nutzung einer Laplace-Korrespondenztabelle (trivial).
2. Partialbruchzerlegung und anschließende Nutzung einer Laplace-Korrespondenztabelle (muss man üben).
3. Explizite Lösung des Umkehrintegrals (z.B. über Residuensatz → schwer).

3.3 Partialbruchzerlegung I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1) Sei $m < n$ und $N(s)$ habe n verschiedene Polstellen.

- Zerlege $Y(s)$ in

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{B_1}{(s-s_1)} + \frac{B_2}{(s-s_2)} + \ldots + \frac{B_n}{(s-s_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{(s-s_i)}$$

unter Beachtung von $e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$ ergibt sich $y(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i e^{s_i t}$

- **Frage:** Wie bestimmt man die B_i´s ?

- Methode 1: Für jeden Pol s_k

$$(s-s_k)\frac{Z(s)}{N(s)} = B_1\frac{(s-s_k)}{(s-s_1)} + \ldots + B_k + \ldots + B_n\frac{(s-s_k)}{(s-s_n)}$$

$$\rightarrow \quad B_k = \lim_{s\to s_k}(s-s_k)\frac{Z(s)}{N(s)} = Z(s_k)\lim_{s\to s_k}\frac{(s-s_k)}{N(s)} = \frac{Z(s_k)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(s_k-s_i)}$$

Kürzen von s_k in $N(s)$

3.3 Partialbruchzerlegung II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

- Alternative: Anwendung der Regel von L´Hospital

→ Heaviside´scher Entwicklungssatz

$$B_k = Z(s_k)\lim_{s\to s_k}\frac{\frac{d}{ds}(s-s_k)}{\frac{d}{ds}N(s)} = \frac{Z(s_k)}{\frac{d}{ds}N(s)\big|_{s=s_k}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Z(s)}{N(s)}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{Z(s_i)}{N'(s_i)}e^{s_i t}.}$$

- Methode 2: $Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{B_1}{(s-s_1)} + \frac{B_2}{(s-s_2)} + \ldots + \frac{B_n}{(s-s_n)}$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{(s-s_i)} = \frac{B_i\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(s-s_i)}{N(s)}$$

- Berechnung der B_i´s durch Koeffizientenvergleich

$$Z(s) = B_i\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(s-s_i)$$

→ Es entsteht ein lineares Gleichungssystem der Ordnung n, über das die Parameter bestimmt werden können.

3.3 Beispiel zur Partialbruchzerlegung

Aufgabe:

- Gegeben sei

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1) \cdot (s+2)}$$

- Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung.

Lösung:

a) Polynomdivision, um $\mathrm{m} < \mathrm{n}$ zu erreichen:

$$\begin{array}{l} (s^2 + 2s + 2) : (s^2 + 3s + 2) = 1 - s/(s^2 + 3s + 2) + 0 \\ \underline{-(s^2 + 3s + 2)} \\ -s + 0 \end{array}$$

b) anschließend $\Rightarrow \quad F(s) = 1 - \frac{s}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$

$$\begin{array}{l} As + Bs = -s \\ 2A + B = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 1, B = -2$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = 1 + \frac{1}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)}$$

3.3 Partialbruchzerlegung III

Sei $\mathrm{m} < \mathrm{n}$ und $N(s)$ habe mehrfache Polstellen.

- Treten einzelne Polstellen des Nennerpolynoms $N(s)$ mehrfach auf, so enthält die Partialbruchzerlegung Terme der Form

$$\ldots + \frac{B_{v_1}}{(s - s_v)} + \frac{B_{v_2}}{(s - s_v)^2} + \ldots + \frac{B_{v_r}}{(s - s_v)^r} + \ldots,$$

  wobei s_v eine dieser Mehrfachwurzeln mit der Vielfachheit r darstellt.

- Die zugehörigen Koeffizienten ergeben sich aus der Formel

$$B_{v_i} = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \left\{ (s - s_v)^r \frac{Z(s)}{N(s)} \right\} \Bigg|_{s=s_v}$$

- für $\mathrm{i} = 1 \ldots \mathrm{r}$. Aus diesem Ergebnis geht als Sonderfall für $\mathrm{r} = 1$ die Bestimmung der B_k bzw. der Heaviside´ sche Entwicklungssatz hervor. Die Rücktransformation der Einzelterme nach der Korrespondenztabelle liefert dann

$$y(t) = \ldots + \left(B_{v_1} + B_{v_2} t + \ldots + B_{v_r} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right) e^{s_v t} + \ldots$$

3.3 Beispiel zur Partialbruchzerlegung II

Aufgabe:

- Gegeben sei $$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2 \cdot (s+2)}$$
- Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung.

Lösung:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2 \cdot (s+2)} = \frac{B_{1_1}}{(s+1)} + \frac{B_{1_2}}{(s+1)^2} + \frac{B_2}{(s+2)}$$

$$B_{1_1} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left\{ (s-(-1))^2 \frac{Z(s)}{N(s)} \right\} \Bigg|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left\{ (s+1)^2 \frac{Z(s)}{N(s)} \right\} \Bigg|_{s=-1}$$

$$= \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} \Bigg|_{s=-1} = \left\{ \frac{-1}{(s+2)^2} \right\} \Bigg|_{s=-1} = -1$$

$$B_{1_2} = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}} \left\{ (s-(-1))^2 \frac{Z(s)}{N(s)} \right\} \Bigg|_{s=-1} = \left\{ (s+1)^2 \frac{Z(s)}{N(s)} \right\} \Bigg|_{s=-1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)} \qquad B_2 = \left\{ (s+2) \frac{Z(s)}{N(s)} \right\} \Bigg|_{s=-2} = 1$$

3.3 Beispiel zur Partialbruchzerlegung III

Beispiel zur Vorgehensweise bei konjugiert-komplexen Polen:

Aufgabe:

- Gegeben sei $$F(s) = \frac{3}{s \cdot (s^2 + 2s + 5)}$$
- Anmerkung: es gibt 2 Pole bei $s_{1,2} = -1 \pm 2i$
- Diese Funktion muss mit einem modifizierten Ansatz zerlegt werden

$$F(s) = \frac{3}{s \cdot (s^2 + 2s + 5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 + K_3 s}{(s-(-1+2i)) \cdot (s-(-1-2i))}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 + K_3 s}{s^2 + 2s + 5}$$

- Koeffizientenvergleich führt auf

$$s^2 \cdot (K_1 + K_3) = 0$$
$$s \cdot (2K_1 + K_2) = 0$$
$$5 \cdot K_1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{5} \cdot \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}$$

Gliederung

3.1 Einführung
3.2 Definition und Eigenschaften der Laplace-Transformation
3.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation
3.4 Blockdiagramme und Übertragungsfunktionen
3.5 Hausaufgaben

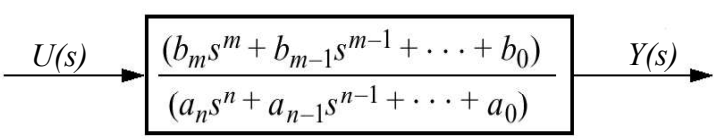
3.4 Blockdiagramme und Übertragungsfunktionen

Gegeben sei die lineare zeitinvariante Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + ... + a_n y^{(n)}(t) \;=\; b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + ... + b_m u^{(m)}(t), \quad m \leq n$$

- $u(t)$ ist das Eingangssignal, $y(t)$ ist das Ausgangssignal.
- Alle Anfangsbedingungen seien 0.
- Die **Übertragungsfunktion** $G(s)$ dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

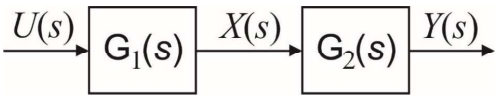
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0)}$$



3.4 Zusammenschaltung von Übertragungsgliedern

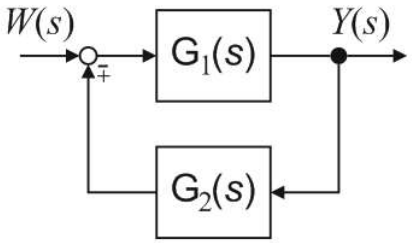
Wenn $G_1(s)$ und $G_2(s)$ Übertragungsfunktionen im Laplace-Bereich sind, ergibt sich für den Systemausgang einer Serienschaltung

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$



und einer Kreisschaltung (Rückkopplung)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}$$



Merke: Übertragungsfunktion der Kreisschaltung:
Vorwärtsübertragungsfunktion / 1 ± Schleifenübertragungsfunktion

http://www.manufactum.de/fernsprechapparat-w-48-p752451/

3.4 Beispiel

Aufgabe: Gegeben sei $u(t) = \sigma(t) = 1(t)$ und folgende Dgl. :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \sigma(t)$$

- Berechnen Sie $y(t)$ unter der Voraussetzung, dass alle Anfangsbedingungen gleich null sind.

Lösung:

- Berechne die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$
- Berechne $Y(s)$ $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+2)}$
- Partialbruchzerlegung $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{0,5}{s} - \frac{0,5}{s+2}$
- Laplace-Rücktransformation $y(t) = 0,5 - 0,5\left(e^{-2t}\right) = 0,5 \cdot \left(1 - e^{-2t}\right)$

3.4 Impulsantwort und Gewichtsfunktion

Gegeben sei

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0)}$$

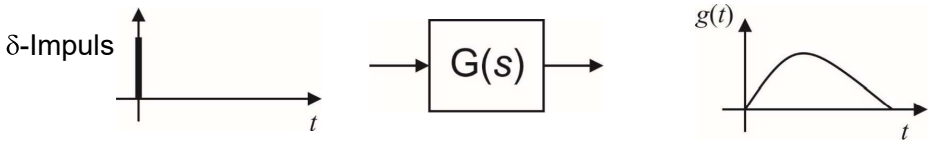
- Hinweis: die Übertragungsfunktion G(s) entspricht $Y(s) = G(s)$ wenn $U(s) = 1$
- In diesem Fall gilt:

$$Y_{impuls}(s) = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0)} \cdot 1$$

Dies ist die Laplace-Transformierte eines Dirac δ-Impulses

Die Laplace-Rücktransformation der Übertragungsfunktion selbst beschreibt die Antwort eines Systems $G(s)$ auf einen δ -Impuls.

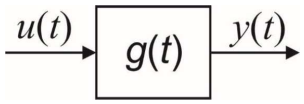
- Im Zeitbereich bezeichnen wir die **Impulsantwort** des Systems $G(s)$ auch als **Gewichtsfunktion** $g(t)$.
- Die Gewichtsfunktion beschreibt das System eindeutig.



3.4 Faltungsoperation

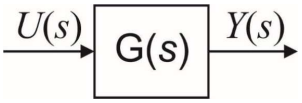
- Beachte: Im Zeitbereich wird ein beliebiges, nicht notwendigerweise periodisches Eingangssignal $u(t)$ mit dem Ausgang $y(t)$ über das **Faltungsintegral** mit der **Gewichtsfunktion** $g(t)$ eines Systems verknüpft:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau = g(t) * u(t)$$



- Im s-Bereich verknüpft die **Übertragungsfunktion** G(s) die Ein- und Ausgangssignale, die Faltung wird zum Produkt.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$



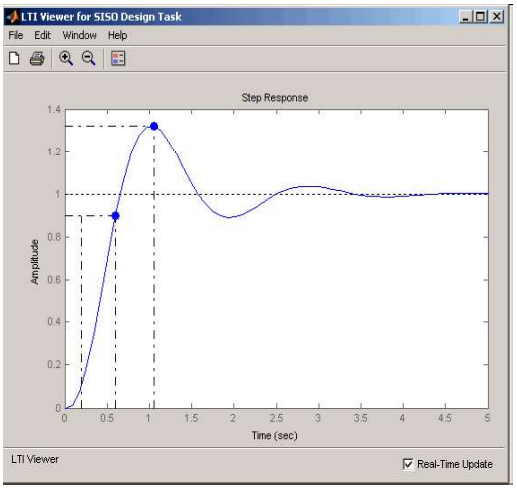
3.4 Sprungantwort

Da es physikalisch „schwierig“ ist, einen δ-Impuls zu erzeugen, wird anstelle der Gewichtsfunktion häufig die sog. „Sprungantwort“ eines Systems gemessen.

- Im Laplace-Bereich ergibt sich:

$$Y_{\text{sprung}}(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

- Die Rücktransformation in den Zeitbereich erzeugt eine Sprungantwort.
- Diese wird auch als „**Übergangsfunktion**“ bezeichnet und häufig mit $h(t)$ abgekürzt.
- Ein Beispiel findet sich rechts.



http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/control/getstart/step_response_updated.gif

- Beachte:

$$y_{\text{impuls}}(t) = g(t) = \frac{d}{dt} y_{\text{sprung}}(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

Gliederung

3.1 Einführung
3.2 Definition und Eigenschaften der Laplace-Transformation
3.3 Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation
3.4 Blockdiagramme und Übertragungsfunktionen
3.5 Hausaufgaben

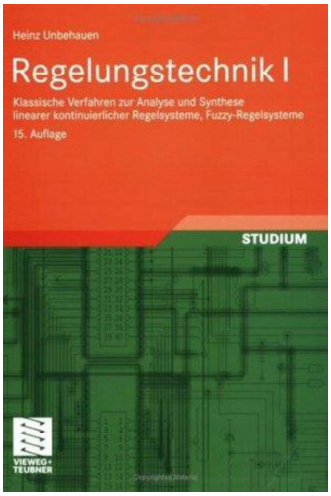
3.5 Zum Nachlesen

Hausaufgabe:

- Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …

Zur Vertiefung:

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008
  - darin Kap. 4.1 und 4.2



4. Modellbildung im Frequenzbereich

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Analyse Elektrischer Netze

- **Wiederholung: Kirchhoffsche Gesetze**
- **Passive Schaltungen und komplexe Impedanz**
- **Knoten- and Maschen-Analyse**
- **Aktive und Passive Schaltungen**
- **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen**

4.2 Translatorische Mechanische Systeme

4.3 Rotatorische Mechanische Systeme

4.4 Elektromechanische Systeme

4.5 Hausaufgaben

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/fe/Gustav_Robert_Kirchhoff.jpg

Gustav Robert Kirchhoff
deutscher Physiker
*12. März 1824 in Königsberg (Preußen)
† 17. Oktober 1887 in Berlin

4.1 Wiederholung: Kirchhoffsche Gesetze

Erstes Kirchhoffsches Gesetz: Die Summe aller Ströme über eine beliebig gewählte geschlossene Hülle ist stets Null:

$$\sum_k I_k = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_k I_k(t) = 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_k I_k(s) = 0$$

- Als wichtiger Spezialfall ergibt sich die **Knotenregel**: Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist stets Null

Zweites Kirchhoffsches Gesetz („Maschenregel“):

- Die Summe aller Spannungen entlang eines beliebig gewählten geschlossenen Umlaufs (Masche) ist stets Null:

$$\sum_k U_k = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_k U_k(t) = 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_k U_k(s) = 0$$

- Wichtig: diese Gesetze gelten auch im Frequenzbereich …
- Warum?
  - Weil die betrachteten Systeme per Definition linear sind …

4.1 Komplexe Impedanzen und Leitwerte

Wir definieren Spannungs-Strom-, Spannungs-Ladungs-Beziehungen sowie Impedanzen (komplexe Widerstände) und Admittanzen (komplexe Leitwerte) für die drei passiven Schaltungselemente Widerstand, Kondensator und Spule.

Schaltungen aus Strom- und Spannungsquellen sowie passiven Impedanzen nennt man “**passive Schaltungen**”.

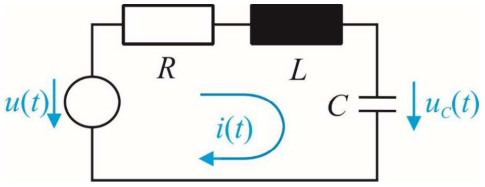
Symbol	Spannungs – Strom – Beziehung		Spannungs-Ladungs-Beziehung	Impedanz Z(s) = U(s)/I(s)	Admittanz Y(s) = I(s)/U(s)
C Kapazität	$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
R Widerstand	$u(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}u(t)$	$u(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
L Induktivität	$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau$	$u(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

4.1 RLC-Serienschaltung I

Aufgabe:
Gesucht ist die Kondensatorspannung $u_C(t)$ als Funktion der Spannungsquelle $u(t)$.

Lösung:

- Hinweis: Soweit nicht anders angegeben, wird angenommen, dass alle Anfangsbedingungen abgeklungen sind.
- **Maschenregel** $\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$
- **Knotenregel** $\sum_{j=1}^{m} i_j = 0$



4.1 RLC-Serienschaltung II

Die Summe aller Spannungen (angenommen, dass die Anfangsbedingungen gleich null sind), ergibt die Integrodifferentialgleichung:

$$L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = u(t)$$

Unter Benutzung von $i(t) = dq(t)/dt$ tauschen wir die Variablen Strom und Ladung:

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

Mit der Spannungs – Ladungs – Beziehung lässt sich die Gleichung weiter umschreiben:

$$q(t) = C\,u_C(t)$$

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t)$$

→ Lineare Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

→ Eingang ist $u(t)$, Ausgang ist $u_C(t)$

4.1 RLC-Serienschaltung III

Laplace-Transformation der Dgl.

$$U(s) = \left(LCs^2 + RCs + 1\right) \cdot U_C(s)$$

- gebrochen-rationale Funktion zweiter Ordnung

$$\Rightarrow \quad \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

- Merke: Definition einer komplexen Impedanz bzw. Admittanz

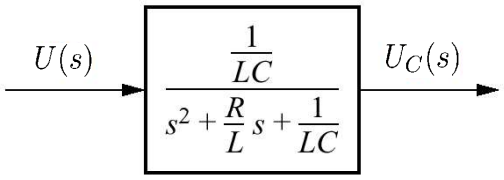
$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}, \quad Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$$

- Entsprechend:

$$Z_R(s) = \frac{U_R(s)}{I(s)} = R$$

$$Z_C(s) = \frac{U_C(s)}{I(s)} = \frac{1}{s \cdot C}$$

$$Z_L(s) = \frac{U_L(s)}{I(s)} = L \cdot s$$



4.1 Ermittlung der Übertragungsfunktion

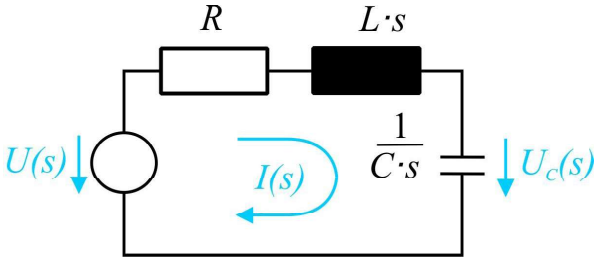
Anmerkung:

- Unter Benutzung der komplexen Impedanzen lässt sich die Übertragungsfunktion auch direkt und viel schneller mit Hilfe der Spannungsteilerregel im Laplace-Bereich bestimmen

Für das Beispiel gilt:

$$U(s) = \left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right) \cdot I(s)$$

$$U_C(s) = \left(\frac{1}{Cs}\right) \cdot I(s)$$



- Die Übertragungsfunktion lässt sich unmittelbar durch Elimination von *I(s)* bestimmen.

4.1 Maschen- und Knotenanalyse

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Wir erinnern uns:

Maschenanalyse

- Ein „flaches“ oder „planares“ Netzwerk ist definiert als eine Schaltung, die auf einer Oberfläche abgebildet werden kann, ohne dass sich Leitungen überkreuzen
- In einem planaren Netzwerk mit ***m*** Maschen gibt es ***m*** **linear unabhängige Maschengleichungen**.

Knotenanalyse

- Ein „primärer“ Knoten in einem Netzwerk ist definiert als ein Ort, an dem sich drei oder mehr Leitungen treffen.
- In einem planaren Netzwerk mit ***k*** Knoten gibt es ***(k –1)*** **linear unabhängige Knotengleichungen**.

4.1 RC-Schaltung mit zwei Maschen I

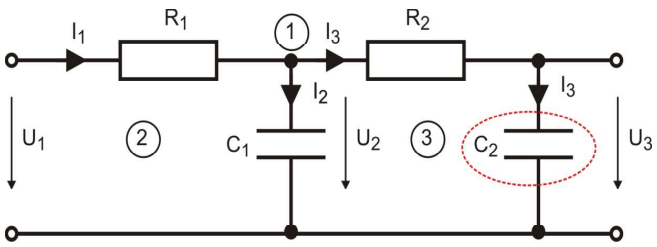
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Aufgabe:

Gegeben ist das folgende komplexe Netzwerk:

a.) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = U_3(s) \,/\, U_1(s)$ im Laplace-Bereich. Welches dynamische Systemverhalten liegt vor?

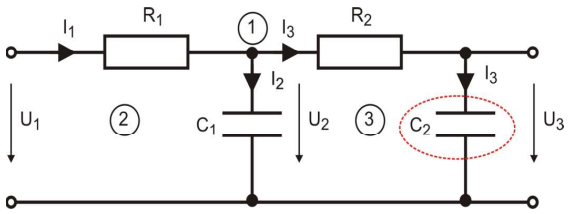
b.) Geben Sie ein Modell im Zeitbereich an (Differentialgleichung).



4.1 RC-Schaltung mit zwei Maschen II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lösung von Aufgabe (a):



Ohmsches Gesetz (a) $U_3(s) = \frac{1}{s\,C_2} \cdot I_3(s)$

(b) $U_2(s) = \frac{1}{s\,C_1} \cdot I_2(s)$

Knotenregel (1) $I_1(s) = I_2(s) + I_3(s)$

Maschenumlauf (2) $U_1(s) = I_1(s) \cdot R_1 + U_2(s)$

Maschenumlauf (3) $U_2(s) = I_3(s) \cdot R_2 + U_3(s)$

4.1 RC-Schaltung mit zwei Maschen III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

aus

1.) $I_2(s) = I_1(s) - I_3(s)$

2.) $U_1(s) - U_2(s) = I_1(s) \cdot R_1 \rightarrow I_1(s) = \frac{1}{R_1} \cdot (U_1(s) - U_2(s))$

3.) $U_2(s) - U_3(s) = I_3(s) \cdot R_2 \rightarrow I_3(s) = \frac{1}{R_2} \cdot (U_2(s) - U_3(s))$

lassen sich I_1, I_2, I_3 und U_2 eliminieren:

(a) in (3) $\rightarrow U_3(s) = \frac{1}{R_2 \cdot C_2 \cdot s} \cdot (U_2(s) - U_3(s))$

(3) und (2) in (1)

(1) in (b) $\rightarrow U_2(s) = \frac{1}{s \cdot C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} \cdot (U_1(s) - U_2(s)) - \frac{1}{R_2} \cdot (U_2(s) - U_3(s)) \right)$

$= \frac{1}{s \cdot R_1 C_1} \cdot U_1(s) - \frac{1}{s \cdot R_1 C_1} \cdot U_2(s) - \frac{1}{s \cdot R_2 C_1} \cdot U_2(s) + \frac{1}{s \cdot R_2 C_1} \cdot U_3(s)$

4.1 RC-Schaltung mit zwei Maschen IV

RWTH AACHEN UNIVERSITY

(I) $U_3(s) \cdot (R_2C_2s + 1) = U_2(s)$

(II) $U_2(s) \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot R_1C_1} + \frac{1}{s \cdot R_2C_1}\right) = \frac{1}{s \cdot R_1C_1} \cdot U_1(s) + \frac{1}{s \cdot R_2C_1} \cdot U_3(s)$

$$\rightarrow\ U_3(s) \cdot (1 + R_2C_2s) \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot R_1C_1} + \frac{1}{s \cdot R_2C_1}\right) = \frac{1}{s \cdot R_1C_1} \cdot U_1(s) + \frac{1}{s \cdot R_2C_1} \cdot U_3(s)$$

$$U_3(s) \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot R_1C_1} + \frac{1}{s \cdot R_2C_1} + \frac{R_2C_2}{R_1C_1} + \frac{C_2}{C_1} + R_2C_2s - \frac{1}{s \cdot R_2C_1}\right) = \frac{1}{s \cdot R_1C_1} \cdot U_1(s)$$

$$U_3(s) \cdot \left(\frac{1 + s \cdot R_1C_1 + s \cdot R_2C_2 + s \cdot R_1C_2 + s^2 \cdot R_1R_2C_1C_2}{s \cdot R_1C_1}\right) = \frac{1}{s \cdot R_1C_1} \cdot U_1(s)$$

$$\frac{U_3(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + s^2 \cdot (R_1C_1R_2C_2)} = \frac{1}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2}$$

System zweiter Ordnung

4.1 RC-Schaltung mit zwei Maschen V

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lösung von Aufgabe (b):

aus $\frac{U_3(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + s^2 \cdot (R_1C_1R_2C_2)}$

ergibt sich $\left(1 + s \cdot \underbrace{(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)}_{= a_1} + s^2 \cdot \underbrace{(R_1C_1R_2C_2)}_{= a_2}\right) \cdot U_3(s) = U_1(s)$

und damit $U_3(t) + a_1 \cdot \dot{U}_3(t) + a_2 \cdot \ddot{U}_3(t) = U_1(t)$

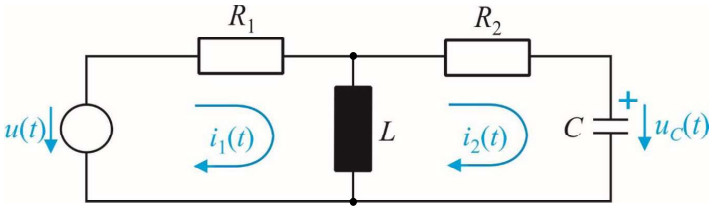
mit $a_1 = R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2$

$a_2 = R_1C_1R_2C_2$

4.1 RLC-Schaltung mit zwei Maschen I

Aufgabe:

Berechnen Sie $I_2(s) \,/\, U(s)$ für die gegebene Schaltung.



4.1 RLC-Schaltung mit zwei Maschen II

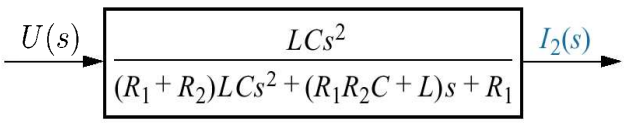
Lösung:

- Masche (1) $$U(s) = R_1 \cdot I_1(s) + Ls \cdot \overbrace{(I_1(s) - I_2(s))}^{= I_L}$$

- Masche (2) $$-Ls \cdot \overbrace{(I_1(s) - I_2(s))}^{= I_L} + R_2 \cdot I_2(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I_2(s) = 0$$

- Auflösen nach $I_1(s)$ und Substitution führt auf

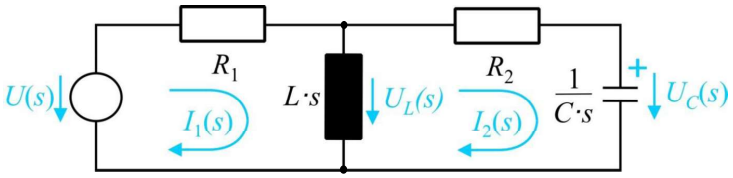
$$G(s) = \frac{I_2(s)}{U(s)} = \frac{LC \cdot s^2}{LC(R_1 + R_2) \cdot s^2 + (R_1 R_2 C + L) \cdot s + R_1}$$



4.1 RLC-Schaltung mit Knotenanalyse

Aufgabe:

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $U_C(s) \,/\, U(s)$ mit Hilfe der Knotenanalyse

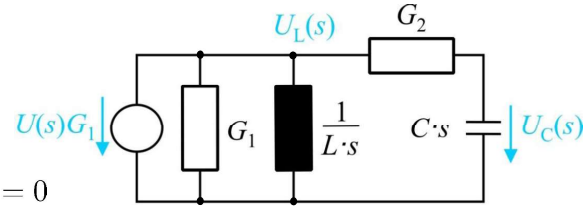


Lösungsskizze:

- „Definiere“ Potentiale als Knoten.
- Ersetze Impedanzen durch Admittanzen und die Spannungsquelle durch eine Stromquelle.

$$U_L: \; U(s)G_1 = G_1 U_L(s) + \frac{1}{Ls} U_L(s) + G_2 \cdot [U_L(s) - U_C(s)]$$

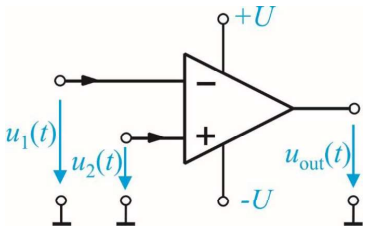
$$U_C: \; Cs \cdot U_C(s) + G_2 \cdot [U_C(s) - U_L(s)] = 0$$



- Substituiere $U_L(s)$ durch Einsetzen

4.1 Aktive Schaltungen I

Operationsverstärker (Abk. OP, OPV, OV, OpAmp, OA):
Der Operationsverstärker ist ein Bauelement der analogen Elektronik. Mittels OA lässt sich eine Übertragungsfunktion realisieren.



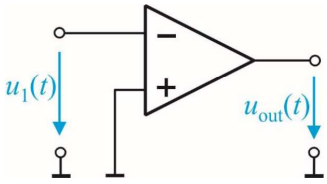
Für ideale Verstärker wird angenommen:

- Differenzspannung: $u_2(t) - u_1(t) \to 0$
- hoher Eingangswiderstand: $Z_i \to \infty$
- Ausgangswiderstand gleich null: $Z_0 \to 0$
- die Verstärkung ist unendlich hoch: $A \to \infty$
- führt zur Ausgangsspannung: $u_{out}(t) = A \cdot (u_2(t) - u_1(t))$

Invertierender Verstärker:

- Der nichtinvertierende Eingang ist geerdet.
- Verstärkt die Eingangsspannung

$$u_{out}(t) = -A \cdot u_1(t)$$



4.1 Aktive Schaltungen II

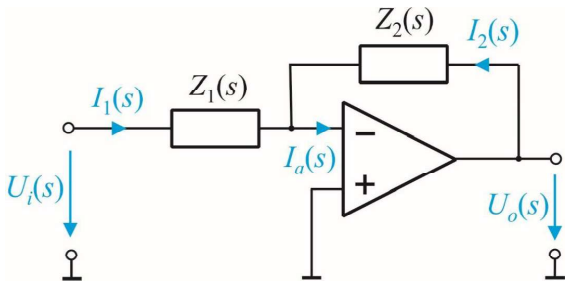
Betrachten wir eine Eingangsimpedanz $Z_1(s)$ und eine Rückkoppelimpedanz $Z_2(s)$, dann ergibt sich die Übertragungsfunktion eines invertierenden Verstärkers aus

$I_a(s) \rightarrow 0$

$I_1(s) = -I_2(s)$ (Knotenregel)

$U_i(s) / Z_1(s) = -U_0(s) / Z_2(s)$

(aufgrund des Ohm'schen Gesetzes)



- Hinweis: Normalerweise wird die endliche Verstärkung A in den Schaltungen nicht dargestellt, sondern $A \rightarrow \infty$ angenommen.

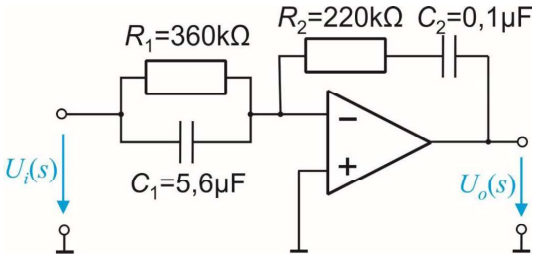
$$\Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}}$$

4.1 Beispiel

Proportionales, integrierendes und differenzierendes Verhalten

Aufgabe:

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $U_0(s) / U_i(s)$ für die gegebene Schaltung.



Lösung:

$$Z_1(s) = \frac{1}{c_1 s + \frac{1}{R_1}} = \frac{360 \cdot 10^3}{2{,}016 s + 1}$$

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = 220 \cdot 10^3 + \frac{10^7}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -1{,}232 \frac{s^2 + 45{,}95 s + 22{,}55}{s}$$

$$= -1{,}232 \cdot s - 56{,}61 - 27{,}777 \cdot \frac{1}{s}$$

Das Übertragungsverhalten zeigt sog. PID-Verhalten

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Analyse Elektrischer Netze
4.2 Translatorische Mechanische Systeme
- **Mechanische Impedanz**
- **Kräftegleichgewicht und Newtons Drittes Gesetz**

4.3 Rotatorische Mechanische Systeme
4.4 Elektromechanische Systeme
4.5 Hausaufgaben

http://academic.wsc.edu/nss/pscm/physics/Assets/images/IsaacNewton.jpg

Sir **Isaac Newton**
* 4. Januar 1643
in Lincolnshire, England
† 31. März 1727 in Kensington, England
englischer Physiker, Mathematiker, Astronom, Alchemist, Philosoph und Verwaltungsbeamter

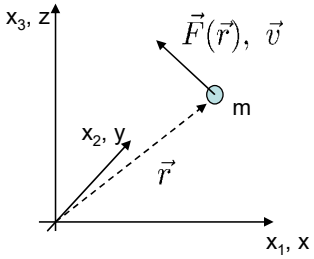
4.2 Newton'sche Grundgesetze I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Newton'sches Gesetz

- „Der Impuls eines Massepunktes m ist konstant, wenn keine Kräfte wirken"

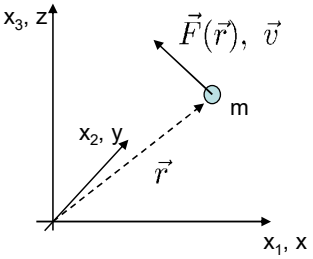
$$\vec{p} = m\vec{v} = const.$$



2. Newton'sches Gesetz

- „Die zeitliche Ableitung des Impulses ist gleich der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft F (*force*)"

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$



4.2 Newtonsche Grundgesetze II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

3. Newtonsches Gesetz

- „Zu jeder Kraft gibt es eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Gegenkraft“
- „Actio = Reactio“

$$\vec{F}_T = m\vec{a} = \vec{F}^{(e)}$$

Trägheitskräfte

Eingeprägte Kräfte

4.2 Translatorische Mechanische Systeme

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Mechanische Systeme „ähneln“ elektrischen Systemen

- Sie lassen sich durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben, die man Laplace-transformieren kann
- Aber: wir unterscheiden translatorische und rotatorische Systeme

Auch in der Mechanik gibt es drei passive Elemente

- Federn und träge Massen sind „*energiespeichernde*“ Elemente (entsprechen Induktivitäten und Kapazitäten)
- Dämpfer sind dissipative Elemente („*energiestreuende*“ Elemente, entsprechen Widerständen)

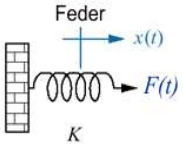
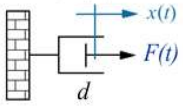
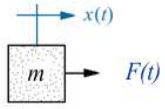
Energiequellen bei linearer Bewegung

- Kraftquellen entsprechen Spannungsquellen
- Geschwindigkeit entspricht elektrischem Strom (man stelle sich einen Strom von Massepunkten vor)

In Analogie zur Elektrotechnik wird die Beziehung Kraft-zu-Geschwindigkeit als „**mechanische Impedanz**“ Z_{M} definiert

4.2 Kraft-Geschwindigkeits-Beziehung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

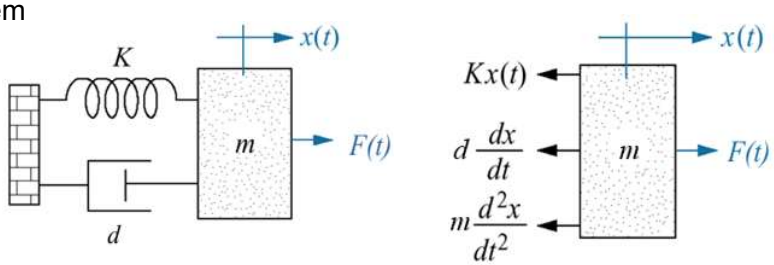
Bauteil	Kraft-Geschwindigkeits-Beziehung	Kraft-Bewegungs-Beziehung	Mechanische Impedanz $Z_M(s) = F(s)/sX(s)$	
Feder 	$F(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$F(t) = K \cdot x(t)$	$\frac{K}{s}$	Vgl. Folie 4 el. Kondensator
Dämpfer 	$F(t) = d \cdot v(t)$	$F(t) = d \cdot \frac{dx(t)}{dt}$	d	Vgl. Folie 4 el. Widerstand
Masse 	$F(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$	$F(t) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{d^2t}$	$m \cdot s$	Vgl. Folie 4 el. Spule

4.2 Übertragungsfunktionen für Bewegungsgleichungen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

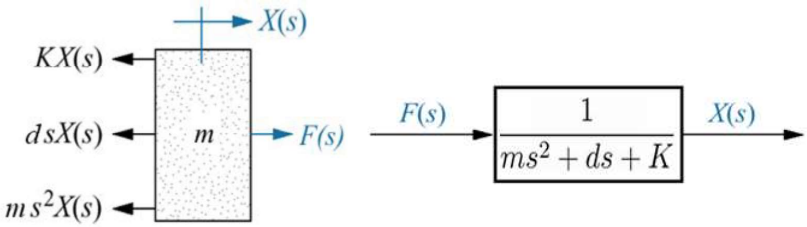
Aufgabe:

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $X(s)/F(s)$ für folgendes mechanisches System



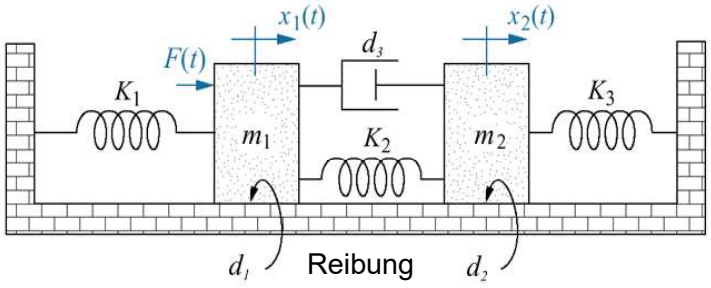
Lösung:

- „Freischneiden“ der Kräfte.
- Für jede Masse: bilde Summe der Kräfte gemäß dem **dritten Gesetz von Newton**



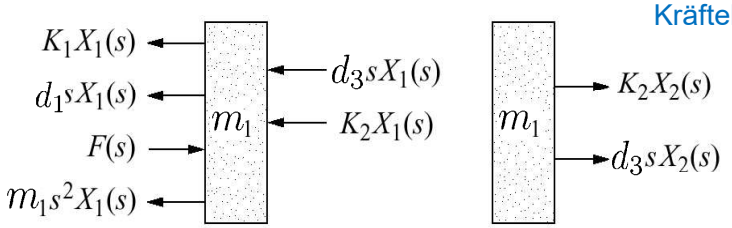
4.2 Beispiel Zwei-Massen-Schwinger

Aufgabe:
Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $X_2(s) \,/\, F(s)$ für folgendes mechanisches System



Lösung:
- Das System hat zwei Massen, die sich individuell bewegen können.
- Wir brauchen also zwei Bewegungsgleichungen.

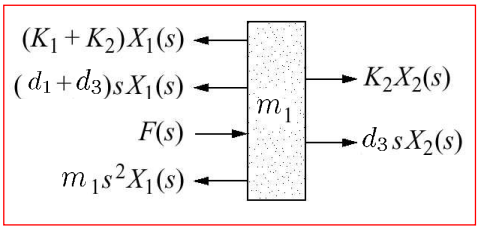
Kräftebilanz für m_1



4.2 Beispiel Zwei-Massen-Schwinger II

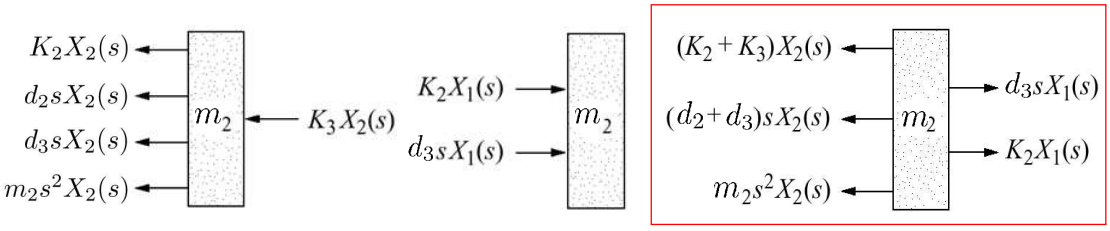
Kräftebilanz für m_1:

$$F(s) = \left[m_1 s^2 + (d_1 + d_3)\, s + (K_1 + K_2)\right] \cdot X_1(s) - (d_3 s + K_2)\, X_2(s)$$



Kräftebilanz für m_2:

$$0 = -\,(d_3 s + K_2)\, X_1(s) + \left[m_2 s^2 + (d_2 + d_3)\, s + (K_2 + K_3)\right] \cdot X_2(s)$$

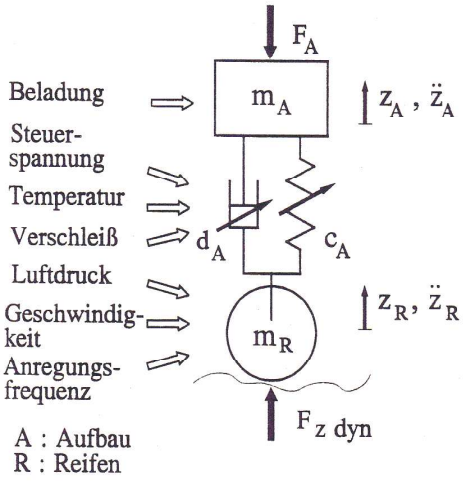


4.2 Anwendung: KFZ-Stoßdämpfer

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Reparatur eines Opel Astra Caravan,
aus http://technikfreun.de/schicket-auto/hinten.jpg

Das erste Auto von Prof. L.:
- Chevy Malibu, 5,6 l V8, Bj. 1972,
- günstig: nur 400 $, Motor und Bremsen in Ordnung, 4 Federn, …
- aber: nur 3 Stoßdämpfer

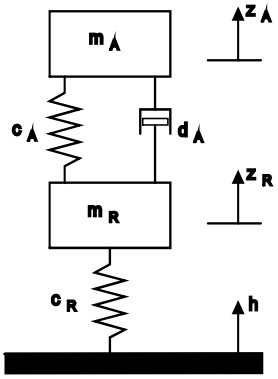


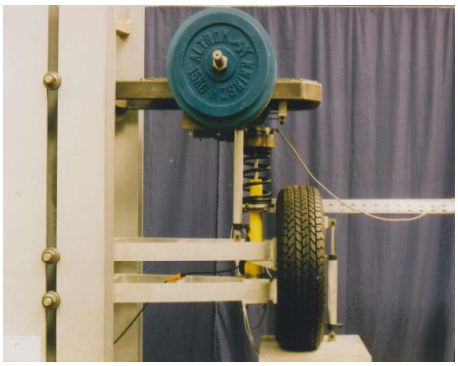
4.2 Anwendung: KFZ-Stoßdämpfer

RWTH AACHEN UNIVERSITY

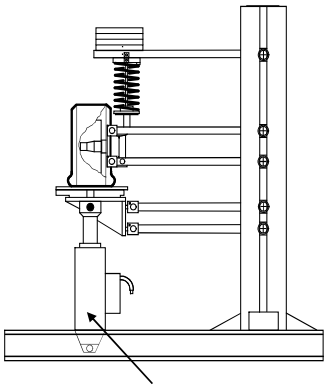
Quelle: https://www.youtube.com/watch?v=2jeR20sGsdw

4.2 Simulation am Viertelfahrzeug-Prüfstand





S. Leonhardt, „Modellgestützte Fehlererkennung mit Neuronalen Netzen", VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 12, Nr. 295, Düsseldorf, 1996, p. 47 und p. 151



Anregung h(t) durch Hydropulser

Als Hausaufgabe: Zeigen Sie, dass $G_A(s) = \frac{z_R(s) - z_A(s)}{s^2 \cdot z_A(s)} = \frac{m_A/c_A}{1 + d_A/c_A \cdot s}$

und $G_R(s) = \frac{z_R(s) - z_A(s)}{h(s) - z_R(s)} = \frac{\frac{m_A c_R}{cA \cdot (m_R + m_A)}}{1 + \frac{d_A}{c_A} \cdot s + \frac{m_A m_R}{cA \cdot (m_R + m_A)} \cdot s^2}$

Gliederung

4.1 Analyse Elektrischer Netze
4.2 Translatorische Mechanische Systeme
4.3 Rotatorische Mechanische Systeme
- **Systeme mit Getriebe**

4.4 Elektromechanische Systeme
4.5 Hausaufgaben

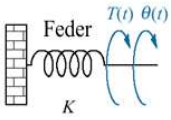
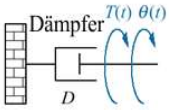
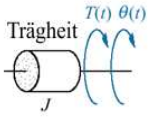
4.3 Rotatorische Mechanische Systeme

Bei rotierenden mechanischen Systemen gibt es „vergleichbare“ passive Komponenten

- Trägheit J ersetzt Masse m
- Drehfeder K ersetzt lineare Feder K
- Drehdämpfer D ersetzt linearen Dämpfer d

Ferner gilt

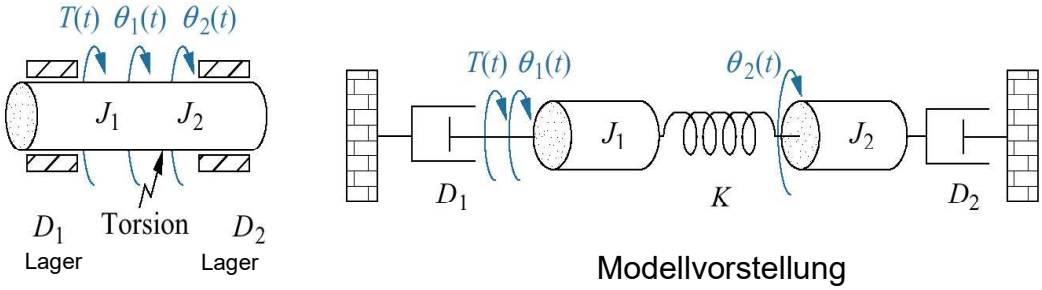
- Drehmoment T (*torque*) ersetzt Kraft F (*force*)
- Drehwinkel θ ersetzt lineare Bewegung x

Bauteil	Drehmoment-Drehzahl-Beziehung	Drehmoment-Winkel-Beziehung	Mechanische Impedanz $Z_M(s) = T(s)/\omega(s)$
	$T(t) = K\int_0^t \omega(\tau)d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	$\frac{K}{s}$
	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\frac{d\theta(t)}{dt}$	D
	$T(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js

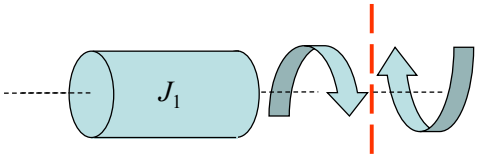
4.3 Übertragungsfunktion einer elastischen Welle

Aufgabe:

- Gegeben ist eine elastische Welle (Elastizität *K*), die von Lagern an beiden Enden gestützt wird, und die durch ein Drehmoment *T* verdreht wird.
- Die Lager haben die Dämpfung *D*, die Trägheitsmomente seien auf die beiden Enden verteilt.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\theta_2(s) \,/\, T(s)$



Modellvorstellung



Drehmomenten-Gleichgewicht

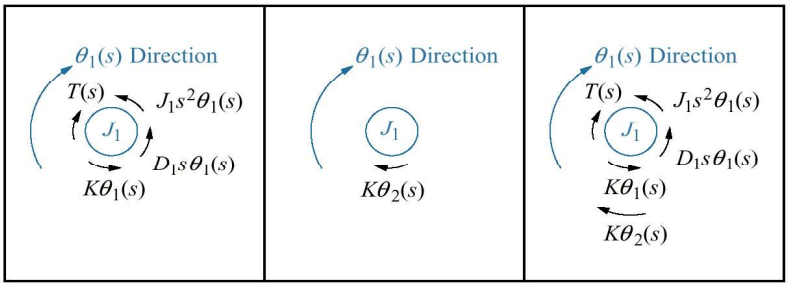
4.3 Übertragungsfunktion einer elastischen Welle II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lösung:

Freischneiden für J_1 ergibt Drehmomentbilanz.

Wähle θ_1 positiv im Uhrzeigersinn.



(a) (b) (c)

Verdrehung von J_1 durch θ_1 | Verdrehung von J_1 durch θ_2 | Gesamtbilanz

Gesamtbilanz der Drehmomente (3. Gesetz von Newton)

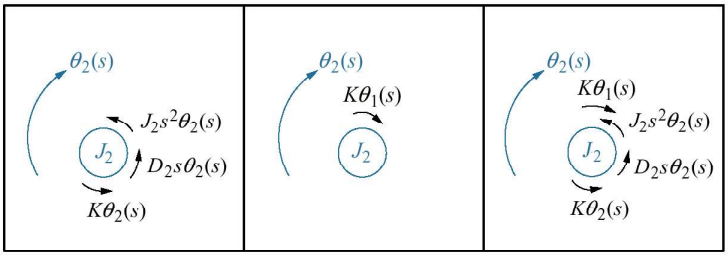
$$T(s) + K\theta_2(s) = \left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right)\theta_1(s)$$

4.3 Übertragungsfunktion einer elastischen Welle III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Freischneiden für J_2 ergibt die zweite Drehmomentbilanz.

Wähle θ_2 positiv im Uhrzeigersinn



(a) (b) (c)

$$K\theta_1(s) - \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right)\theta_2(s) = 0$$

Drehmomentbilanz auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} (1) \quad & -K\theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right)\theta_2(s) = 0 \\ (2) \quad & \left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right)\theta_1(s) - K\theta_2(s) = T(s) \end{aligned}$$

Löse (1) nach θ_1(s) auf und setze ein in (2)

Löse (2) nach θ_2(s) = $f(T(s))$ auf

4.3 Modellierung von Getrieben

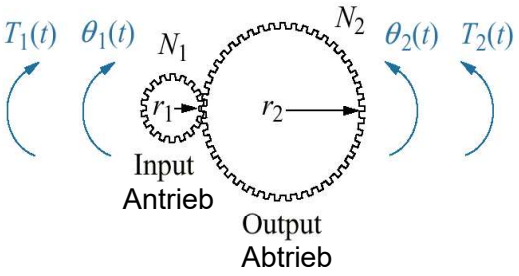
Ohne Schlupf führt eine Getriebedrehung auf $r_1 \cdot \theta_1 = r_2 \cdot \theta_2$.

Daraus ergibt sich $$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

mit N der Anzahl an Zähnen entlang des Umfangs. Diese seien äquidistant verteilt. N_i ist damit proportional zum jeweiligen Radradius r_i.

Für Drehsysteme ist die Drehenergie gegeben durch $T \cdot \theta$ und die Drehleistung durch $T \cdot \omega = T \cdot d\theta/dt$.

$$P = T_2 \cdot \omega_2 = T_1 \cdot \omega_1 = konst.$$
$$\rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$



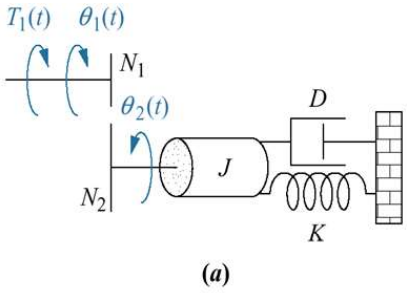
4.3 Mechanische Impedanz in Systemen mit Getriebe I

Frage:

- Kann man eigentlich die mechanische Impedanz von der Abtriebsseite auf die Antriebsseite abbilden und damit das Getriebe „umgehen“?

Antwort:

- Abbildung der Antriebsseite auf die Abtriebsseite

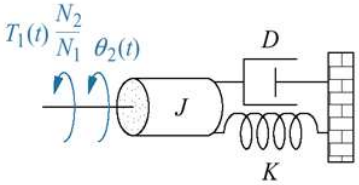


(a)

- Konvertiere θ_2(s) in ein äquivalentes θ_1(s)

$$\left(Js^2 + Ds + K\right) \cdot \theta_2(s) = T_1(s)\frac{N_2}{N_1}$$

$$\left(Js^2 + Ds + K\right) \cdot \theta_1(s)\frac{N_1}{N_2} = T_1(s)\frac{N_2}{N_1}$$



(b)

4.3 Mechanische Impedanz in Systemen mit Getriebe II

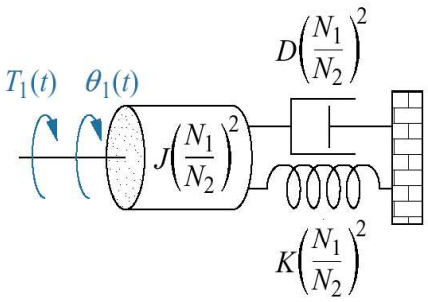
Nach Umformung führt dies auf

$$\left(J \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 s^2 + D \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 s + K \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \right) \cdot \theta_1(s) = T_1(s)$$

Verallgemeinerung:

- Rotatorische mechanische Impedanzen lassen sich durch Getriebe hindurch auf die Antriebsseite abbilden, indem man sie mit folgendem Faktor multipliziert

$$\left(\frac{\text{Zahl der Zähne auf der Antriebsseite}}{\text{Zahl der Zähne auf der Abtriebsseite}} \right)^2$$



(c)

Gliederung

4.1 Analyse Elektrischer Netze
4.2 Translatorische Mechanische Systeme
4.3 Rotatorische Mechanische Systeme
4.4 Elektromechanische Systeme
- **Übertragungsfunktion eines Gleichstrommotors**

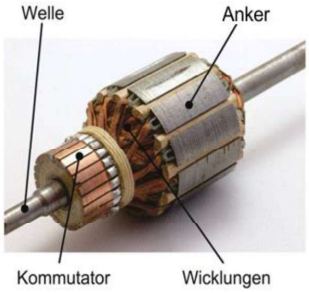
4.5 Hausaufgaben

4.4 Übertragungsfunktion eines elektromechanischen Systems

Kombination von elektrischen und mechanischen Teilsystemen

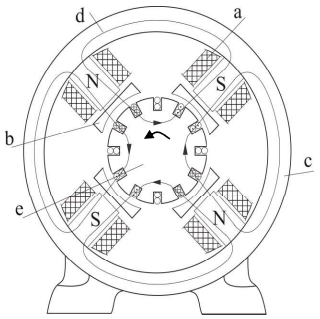
Prominentes Beispiel:

- Gleichstrommotor (DC *servomotor*)
- Anker (Rotor) mit Ankerwicklungen ist drehbar auf einer Achse gelagert
- Stator erzeugt ein konstantes Magnetfeld:
  - Entweder mit Permanentmagneten oder mit stationären Elektromagneten
- Ankerwicklungen müssen kommutiert werden
  - Während der Drehbewegung werden unterschiedliche Wicklungen an- und abgeschaltet



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/8/8b/Anker_Universalmotor.jpg

http://home.versanet.de/~schulte-renger/hand2.gif



Quelle: R.Isermann „Mechatronische Systeme", 2. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 2008, Bild 5.15, S. 207

4.4 Dynamisches Verhalten eines DC Motors I

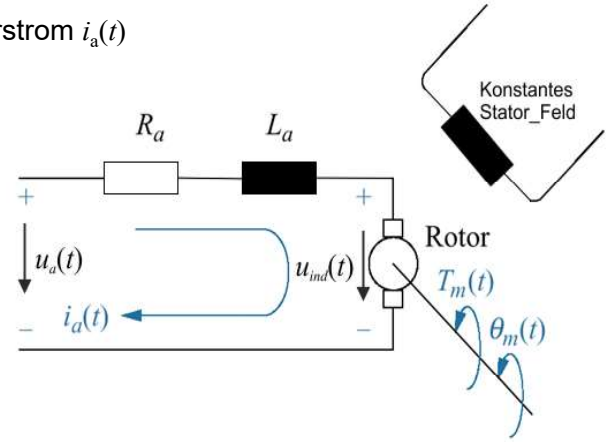
Elektromechanische Kopplung

a.) Motor-Drehmoment $T_m(s) \sim$ Ankerstrom $i_a(t)$

$$T_m(s) = K_t \cdot I_a(s)$$

b.) Elektromotorische Kraft
- sog. „Gegen-EMK",
- basiert auf Induktionsgesetz (3. Maxwellsche Gleichung)

$$u_{ind}(t) = K_b \cdot \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$
$$= K_b \cdot \omega_m(t)$$
$$\rightarrow U_{ind}(s) = K_b \cdot \; s\; \theta_m(s)$$



Elektrisches Teilsystem: Maschenumlauf ergibt

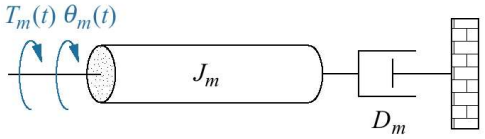
$$R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + U_{ind}(s) = U_a(s)$$

4.4 Dynamisches Verhalten eines DC Motors II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

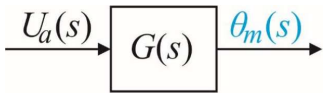
Mechanisches Teilsystem:

$$T_m(s) = \left(J_m s^2 + D_m s\right) \cdot \theta_m(s)$$



Gesamtverhalten:

$$\begin{aligned} U_a(s) &= R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + U_{ind}(s) \\ &= \frac{(R_a + L_a s)\, T_m(s)}{K_t} + K_b\ s\ \theta_m(s) \\ &= \frac{(R_a + L_a s)\left(J_m s^2 + D_m s\right) \cdot \theta_m(s)}{K_t} + K_b\ s\ \theta_m(s) \\ &= \left[\frac{(R_a + L_a s)}{K_t}\left(J_m s + D_m\right) + K_b\right] \cdot s\ \theta_m(s) \end{aligned}$$



$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{\left[\frac{(R_a + L_a s)}{K_t}\left(J_m s + D_m\right) + K_b\right] \cdot s}$$

4.4 Dynamisches Verhalten eines DC Motors III

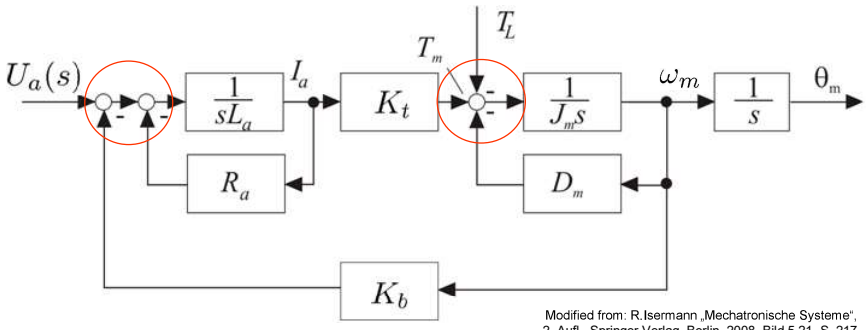
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_m(s) = s \cdot \theta_m(s)$$

Drehzahl:

$$N(s) = \frac{\omega_m(s)}{2\pi}$$



Modified from: R.Isermann „Mechatronische Systeme", 2. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 2008, Bild 5.21, S. 217

Annahmen:

- T_L = 0 (keine Last)
- L_a ziemlich klein → $L_a s << R_a$

→ die Dynamik des elektrischen Teilsystems ist deutlich schneller als die Dynamik des mechanischen Teilsystems

$$\rightarrow \quad G(s) = \frac{\theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{1}{\frac{R_a}{K_t}\left(J_m s + D_m\right) + K_b}\right] = \frac{\frac{K_t}{R_a J_m}}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]}$$

Die Übertragungsfunktion ist also vom Typ $G(s) = \dfrac{K}{s(s+\alpha)}$

4.4 Dynamisches Verhalten eines DC Motors IV

- Manchmal sind nicht alle Parameter dieser Dgl. bekannt, besonders K_t und K_b.
- Für die elektrische Seite gilt:

$$U_a(s) = \frac{(R_a + L_a s)\, T_m(s)}{K_t} + K_b\ s\ \theta_m(s)$$

- Wegen $L_a \approx 0$ ergibt sich

$$U_a(s) \approx \frac{R_a}{K_t} \cdot T_m(s) + K_b\ s\ \theta_m(s)$$

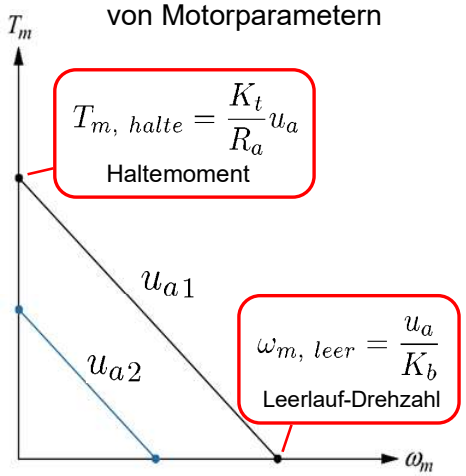
$$\rightarrow T_m(s) = -\frac{K_b K_t}{R_a} \cdot \omega_m(s) + \frac{K_t}{R_a} \cdot U_a(s)$$

- Im stationären Betrieb sind Ankerspannung, Drehzahl und Drehmoment konstant (keine Dynamik)

$$u_a = \frac{R_a}{K_t} \cdot \overline{T_m} + K_b \cdot \overline{\omega_m}$$

$$\Rightarrow \overline{T_m} = \frac{K_t}{R_a} \cdot u_a - \frac{K_t K_b}{R_a} \cdot \overline{\omega_m}$$

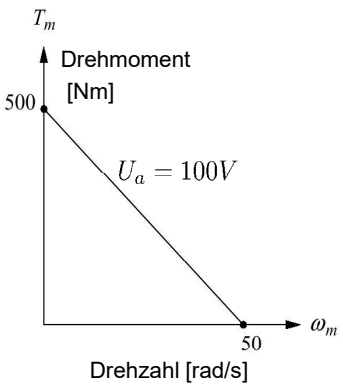
Drehmoment-Drehzahl-Kurve
- nützlich für die Bestimmung von Motorparametern

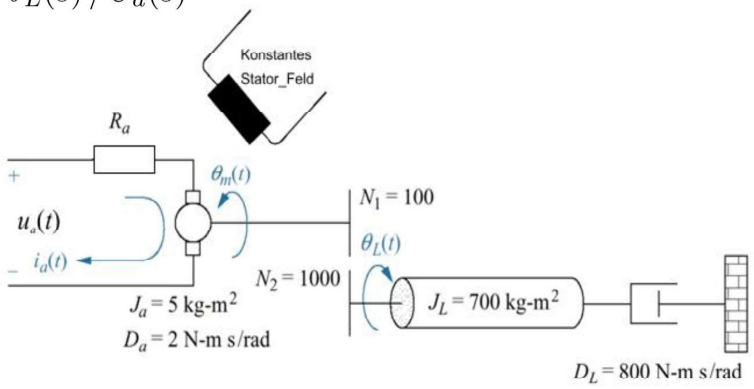


4.4 Beispiel: Gleichstrommotor mit Getriebe I

Aufgabe:

- Gegeben ist ein Gleichstrommotor mit Getriebe.
- Bestimmen Sie $G(s) = \theta_L(s) / U_a(s)$!





Lösung:

$$J_m = J_a + J_L \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 5 + 700 \left(\frac{100}{1000}\right)^2 = 12$$

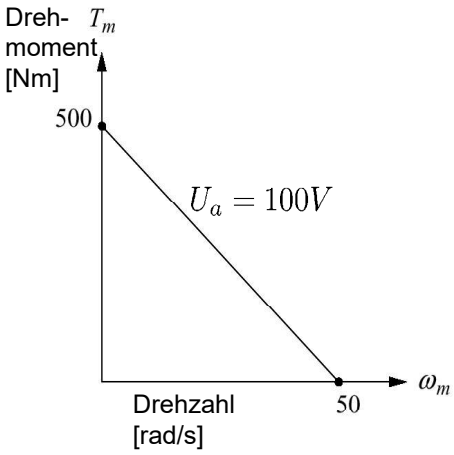
$$D_m = D_a + D_L \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 2 + 800 \left(\frac{100}{1000}\right)^2 = 10$$

4.4 Beispiel: Gleichstrommotor mit Getriebe II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Von der gegebenen Drehmoment-Drehzahl-Kurve erhält man:

- $T_{m,\ halte}$ = 500 Nm
- $\omega_{m,\ leer}$ = 50 rad/s
- U_a = 100 V

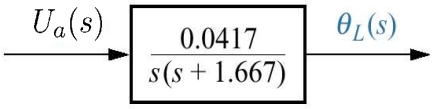


$$\rightarrow\ K_b = \frac{U_a}{\omega_{m,\ leer}} = \frac{100}{50} = 2$$

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{m,\ halte}}{U_a} = \frac{500}{100} = 5$$

$$\rightarrow\ G(s) = \frac{\frac{K_t}{R_a J_m}}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]} = \frac{\frac{5}{12}}{s\left[s + \frac{1}{12}\left(10 + (5)(2)\right)\right]} = \frac{\theta_m(s)}{U_a(s)}$$

Beachte: $\dfrac{\theta_m(s)}{\theta_L(s)} = 10$



Gliederung

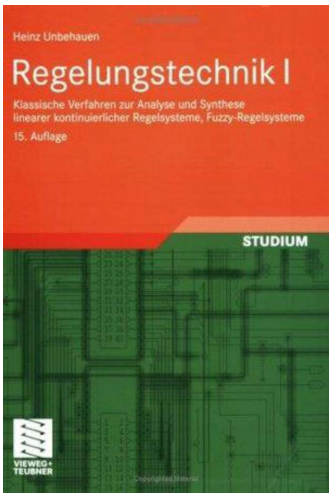
RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Analyse Elektrischer Netze
4.2 Translatorische Mechanische Systeme
4.3 Rotatorische Mechanische Systeme
4.4 Elektromechanische Systeme
4.5 Hausaufgaben

4.5 Zum Nachlesen

Hausaufgabe:

- Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …



Zur Vertiefung:

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008
  - darin Kap. 3

5. Systemdynamik und zeitliches Verhalten

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

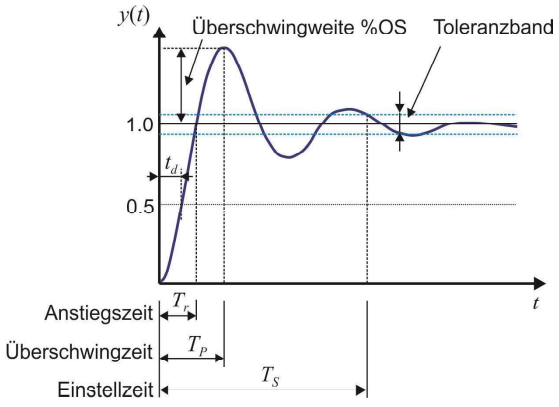
Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

5.1 Pole, Nullstellen und Übergangsverhalten
5.2 Systeme erster Ordnung
5.3 Systeme zweiter Ordnung
5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen
5.5 Einfluss zusätzlicher Nullstellen
5.6 Hausaufgaben



5.1 Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei ein dynamisches System

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0)} = \frac{B(s)}{A(s)}, \; m \leq n$$

Definition:

- Die Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ sind:
  - diejenigen Werte s, für die $G(s)$ unendliche Funktionswerte annimmt
  - die Nullstellen des Nenners $A(s)$, wobei gleichzeitig $B(s) \neq 0$

- Die Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ sind
  - diejenigen Werte s, für die $G(s) = 0$ gilt
  - die Nullstellen des Zählers $B(s)$, wobei gleichzeitig $A(s) \neq 0$

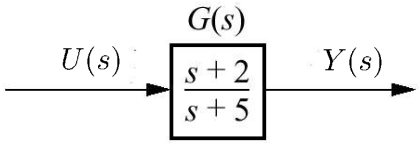
Beachte: Sowohl **Nullstellen** als auch **Pole** beeinflussen den Verlauf der dynamischen Systemantwort auf vorgegebene Eingangssignale $u(t)$.

5.1 Beispiel: System erster Ordnung

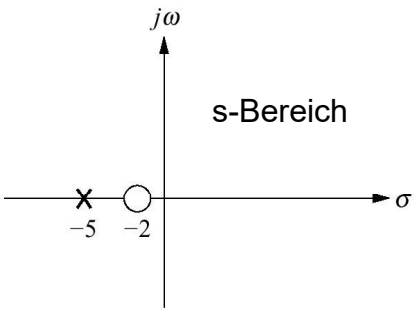
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben ist das unten dargestellte System. Gesucht ist die Sprungantwort.

- Die Sprungantwort wird sowohl durch Nullstellen als auch durch Polstellen beeinflusst.
- Die Pol-Nullstellen-Verteilung im s-Bereich enthält Information über das Zeitverhalten.
- Nullstellen werden in der Pol-Nullstellen-Verteilung mit einem O, Polstellen mit einem X symbolisiert

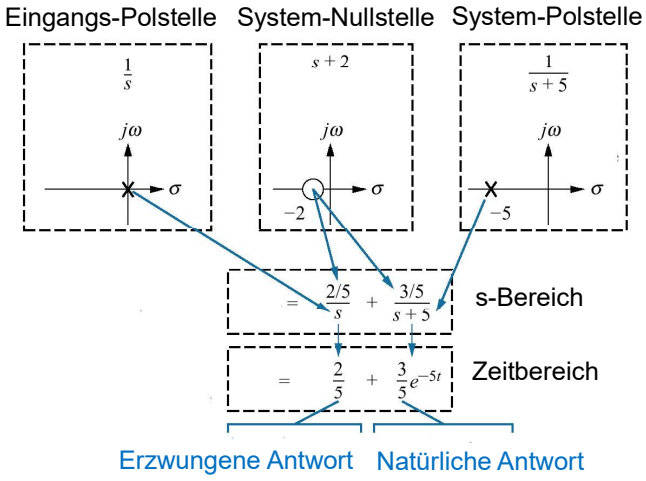


$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot U(s) \\ &= \frac{s+2}{s+5} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} \\ &= \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5} \end{aligned} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot e^{-5t}$$



5.1 Beispiel

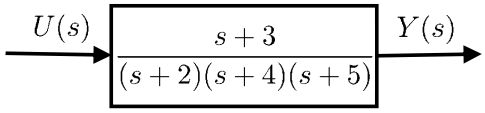
- Die Pole des Eingangssignals generieren die erzwungene Antwort (hier: Pol im Ursprung □ Sprungantwort)
- Die Pole der Übertragungsfunktion generieren die natürliche Systemantwort (hier: Pol bei $s = -a$ generiert e^{-at})
- Die Nullstellen und Pole beeinflussen die Amplituden sowohl von der erzwungenen als auch von der natürlichen Systemantwort



5.1 Beispiel: System dritter Ordnung

Aufgabe:

- Bestimmen Sie die natürliche und die erzwungene Systemantwort bei Sprung am Eingang.



$$\frac{s+3}{(s+2)(s+4)(s+5)}$$

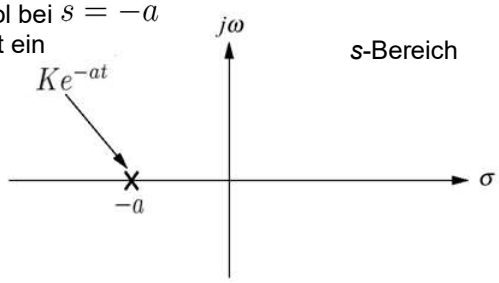
Lösung:

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)(s+5)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} + \frac{K_4}{s+5}$$

$$y(t) = K_1 + K_2 \cdot e^{-2t} + K_3 \cdot e^{-4t} + K_4 \cdot e^{-5t}$$

Jeder Pol bei $s = -a$ generiert ein

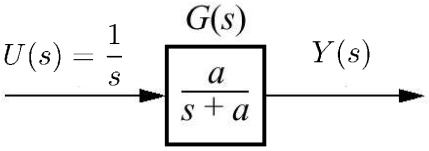


Gliederung

5.1 Pole, Nullstellen und Übergangsverhalten
5.2 Systeme erster Ordnung
5.3 Systeme zweiter Ordnung
5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen
5.5 Einfluss zusätzlicher Nullstellen
5.6 Hausaufgaben

5.2 Systeme erster Ordnung I

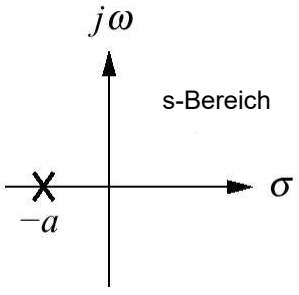
Wie sieht eigentlich die Sprungantwort für ein System erster Ordnung aus?



$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{a}{(s+a)} \cdot \frac{1}{s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = y_p(t) + y_h(t) = 1 - e^{-at}$$

Zur Bedeutung des Koeffizienten ***a***:

- für $t = 1/a$ ist $e^{-at}|_{t=1/a} = e^{-1} = 0.37$
  $\rightarrow \quad y(t)|_{t=1/a} = 1 - 0.37 = 0.63$
- Wir nennen $T_C = 1/a$ die „**Zeitkonstante**“
- Wir nennen „***a***“ die „**exponentielle Frequenz**“

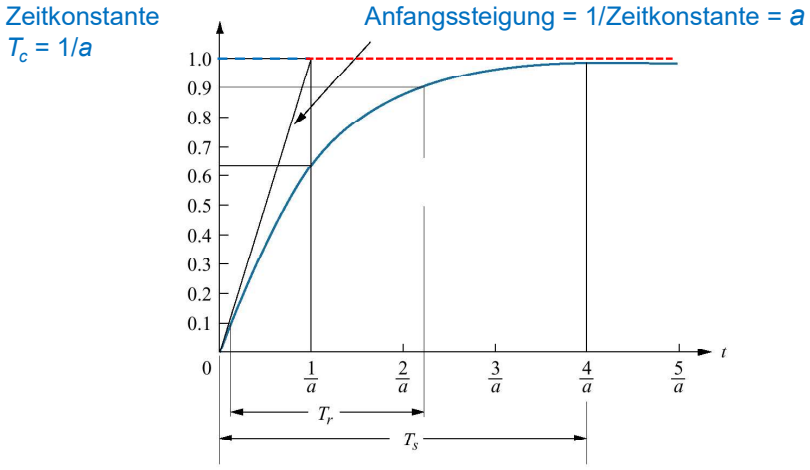


5.2 Systeme erster Ordnung II

- Steigung bei $t = 0$: $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = -(-a) \cdot e^{-0} = a$

Definitionen:

- **Anstiegszeit T_r** (engl. „*rise time*“): Zeit für den Übergang von 10 – 90 % des Endwertes.
- **Ausregelzeit $T_{s,2\%}$**: (engl. „*settling time*“): Zeit bis zum erstmaligen Erreichen und Verbleiben im Intervall □ 2% vom Endwert.



Gliederung

5.1 Pole, Nullstellen und Übergangsverhalten
5.2 Systeme erster Ordnung
5.3 Systeme zweiter Ordnung
- **Einleitung und Beispiele**
- **Allgemeines System zweiter Ordnung**

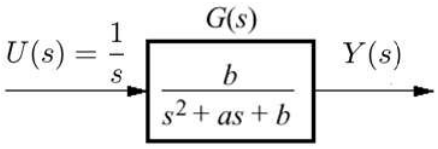
5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen
5.5 Einfluss zusätzlicher Nullstellen
5.6 Hausaufgaben

5.3 Beispielsysteme zweiter Ordnung I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei ein allgemeines System zweiter Ordnung

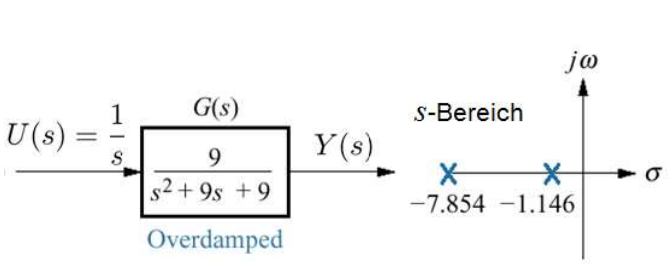
$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

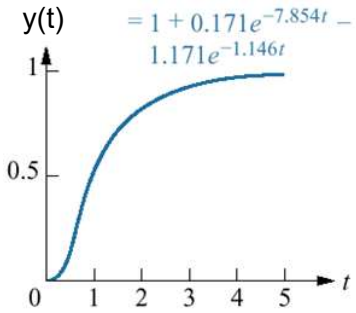


- Die Form der Sprungantwort hängt stark von der Lage der Pole im s-Bereich ab

1. Aperiodisch gedämpftes System

→ zwei reelle Pole

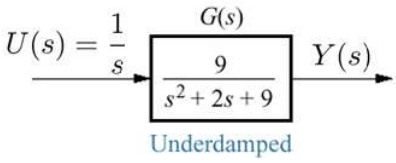


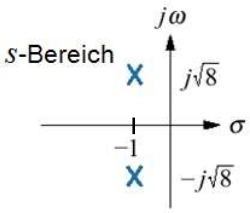


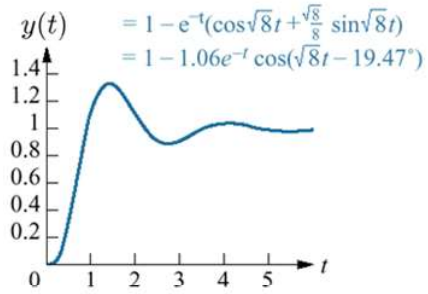
5.3 Beispielsysteme zweiter Ordnung II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

2. Periodisch gedämpftes System







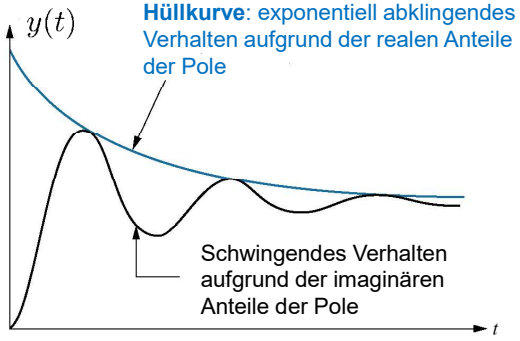
→ zwei konjugiert komplexe Pole

Sprungantwort besteht aus zwei Teilen:

- Konstante + exponentiell gedämpfter Sinus

$$y(t) = \underbrace{y_{ss}(t)}_{} + \underbrace{y_{transient}(t)}_{}$$
$$= K + Ae^{-at} \cdot \cos(\omega_d t - \phi)$$

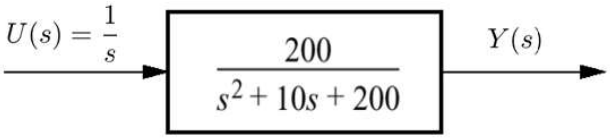
- Der exponentielle Verlauf hüllt die transiente Systemantwort von beiden Seiten ein (Vorzeichenwechsel beim Cosinus)



5.3 Weiteres Beispiel

Aufgabe:

- Gegeben ist das folgende System zweiter Ordnung



- Geben Sie die Form und Verlauf der Sprungantwort an (durch Intuition?).

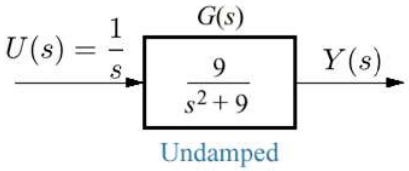
Lösung:

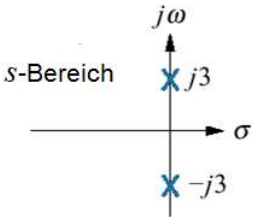
- Polstellen liegen bei $s = -5 \pm j13{,}23$
- Dies ergibt eine Linearkombination von Sinus und Cosinus als Systemantwort

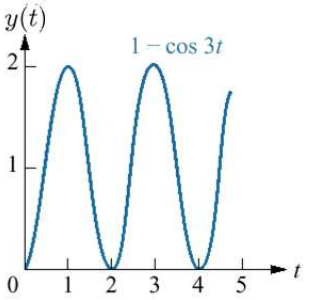
$$y(t) = K_1 + e^{-5t} \cdot (K_2 \cdot \cos 13{,}23t + K_3 \cdot \sin 13{,}23t)$$
$$= K_1 + K_4 \cdot e^{-5t} \cdot \cos(13{,}23t - \phi),$$
$$\text{wobei } \phi = \tan^{-1}(K_3/K_2) \text{ und } K_4 = \sqrt{K_2^2 + K_3^2}$$

5.3 Beispielsysteme zweiter Ordnung III

3. Ungedämpftes System

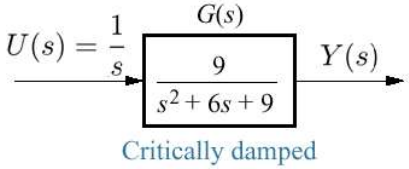


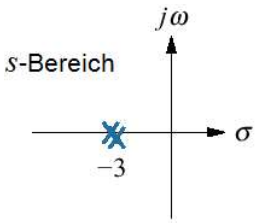


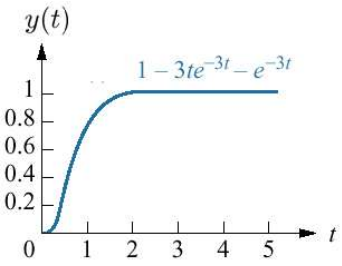


→ zwei konjugiert komplexe Pole

4. Aperiodischer Grenzfall







→ reeller Doppelpol

5.3 Zusammenfassung Sprungantworten

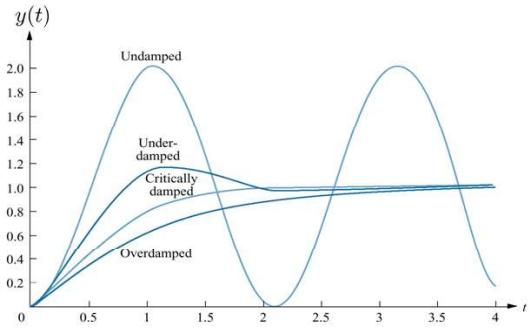
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. **Aperiodisch gedämpfte Antwort**
   Zwei reelle Pole bei $s_{1,2} = -\alpha_{1,2}$
   $$y(t) = A \cdot (1 - K_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} - K_2 \cdot e^{-\alpha_2 t})$$

2. **Periodisch gedämpfte Antwort**
   Zwei komplexe Pole bei $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$
   $$y(t) = A \cdot (1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi))$$

3. **Ungedämpfte Antwort**
   Zwei komplexe Pole bei $s_{1,2} = \pm j\omega_0$
   $$y(t) = A \cdot (1 - \cos(\omega_0 t - \phi))$$

4. **Aperiodischer Grenzfall**
   Zwei reelle Pole bei $s_{1,2} = -\alpha$
   $$y(t) = A \cdot (1 - K_1 \cdot e^{-\alpha t} - K_2 \cdot t \cdot e^{-\alpha t})$$



5.3 Allgemeine Systembeschreibung I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Zur Erinnerung: In der zweiten Vorlesung lernten wir das folgende System kennen:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 u$$

- ω_0 ist die „**Eigenfrequenz**“ des ungedämpften Systems
- D ist der einheitslose „**Dämpfungsgrad**“

Beispiel:

- Gegeben sei ein System zweiter Ordnung
  $$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$
- Ungedämpft (a = 0) → $G'(s) = \frac{b}{s^2 + b}$
- Eigenfrequenz bei $\omega_0 = \sqrt{b} \quad \rightarrow \quad b = \omega_0^2$

5.3 Allgemeine Systembeschreibung II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Nehmen wir nun ein gedämpftes System an $(a \neq 0)$.

- Lösung der quadratischen Nennergleichung (pq-Formel) ergibt:

$$s_{1,2} = -a/2 \pm j\omega_d = -\alpha \pm j\omega_d$$

- Der Imaginärteil ω_d wird als **„gedämpfte natürliche Frequenz“** bezeichnet.
- Der Realteil α der komplexen Pole wird als **„relative Dämpfung“** oder **„Abklingkonstante“** bezeichnet und bestimmt das exponentielle Abklingverhalten

$$D = \frac{|\alpha|}{\omega_0} = \frac{a/2}{\omega_0} \quad \rightarrow \quad a = 2D\omega_0$$

- Die allgemeine Übertragungsfunktion des Systems zweiter Ordnung lautet also

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- à vous: wo liegen eigentlich die Polstellen?

5.3 Beispiel zur Illustration

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Aufgabe:

- Gegeben ist eine Übertragungsfunktion. Bestimmen Sie D und ω_0.

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + \underbrace{4,2}_{=a}\, s + \underbrace{36}_{=b}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \underbrace{2D\omega_0}_{=p}\, s + \underbrace{\omega_0^2}_{=q}}$$

Lösung:

$$b = 36 = \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{b} = 6$$
$$a = 4,2 = 2D\omega_0 \quad \rightarrow \quad D = 0,35$$

- Polstellen bei: $s^2 + ps + q = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ pq-Formel

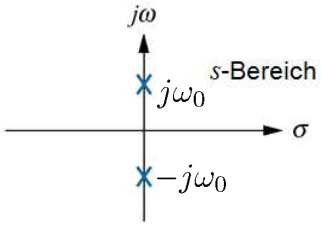
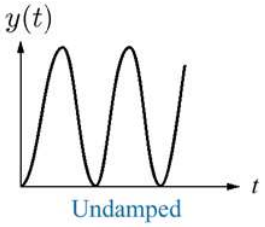
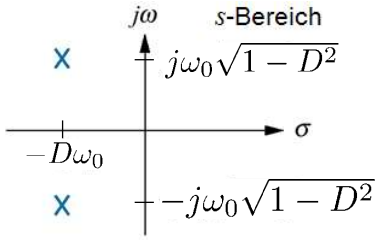
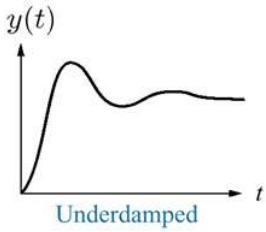
$$\rightarrow \quad = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$

- Merke: aus dieser Beziehung kann man für beliebige D und ω_0 die 4 beschriebenen Fälle ableiten.

http://www.manufactum.de/fernsprechapparat-w-48-p752451/

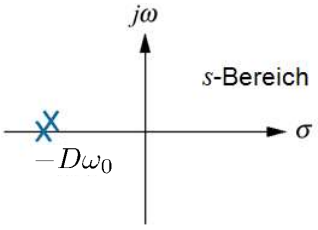
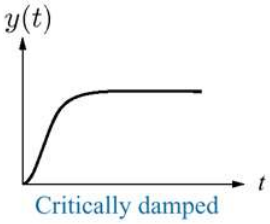
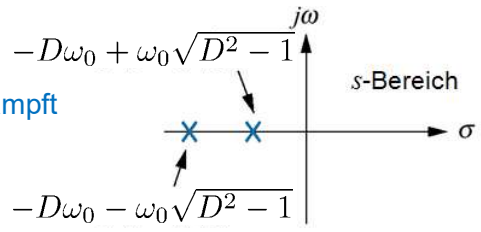
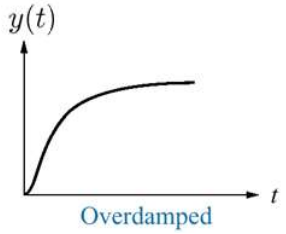
5.3 Allgemeine Systembeschreibung: Pol-Nullstellenverteilung und Sprungantwort I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

D	Polstellen	Sprungantwort $h(t)$
Ungedämpft 0		
Periodisch gedämpft $0 < D < 1$		

5.3 Allgemeine Systembeschreibung: Pol-Nullstellenverteilung und Sprungantwort II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

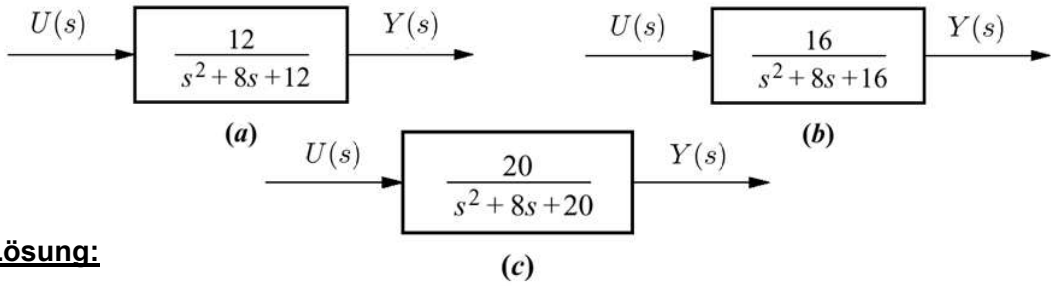
D	Polstellen	Sprungantwort $h(t)$
Aperiodischer Grenzfall $D = 1$		
Aperiodisch gedämpft $D > 1$		

5.3 Illustrative Beispiele zum Dämpfungsgrad

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Aufgabe:

- Berechnen Sie für alle 3 Systeme den Dämpfungsgrad D und klassifizieren Sie die Art der Systemantwort



Lösung:

- Weil:

$\omega_0 = \sqrt{b}$ und $a = 2D\omega_0$

$D = \dfrac{a}{2\sqrt{b}}$

$(a)\ D = \dfrac{8}{2\sqrt{12}} = 1{,}155 > 1$ aperiodisch gedämpft

$(b)\ D = \dfrac{8}{2\sqrt{16}} = 1$ aperiodischer Grenzfall

$(c)\ D = \dfrac{8}{2\sqrt{20}} = 0{,}894 < 1$ periodisch gedämpft

5.3 Periodisch gedämpftes System I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei nun

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \quad , \quad 0 \le D < 1$$

- Sprungantwort

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 + K_3 s}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- Wir erinnern uns, dass

$$s_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$

- Partialbruchzerlegung ergibt

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 + K_3 s}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2D\omega_0}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- Aus einer Korrespondenztabelle ergibt sich

$$\frac{s + z_1}{(s+a)^2 + \omega_d^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sqrt{\frac{(z_1 - a)^2 + \omega_d^2}{\omega_d^2}} \cdot e^{-at} \sin(\omega_d t + \phi), \ \text{mit } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{z_1 - a}\right)$$

5.3 Periodisch gedämpftes System II

Daher

$$\frac{s+2D\omega_0}{s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2} = \frac{s+z_1}{(s+a)^2+\omega_d^2} = \frac{s+z_1}{s^2+2as+a^2+\omega_d^2}$$

woraus folgt

$$a = D\omega_0$$
$$z_1 = 2D\omega_0$$
$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{\frac{(z_1-a)^2+\omega_d^2}{\omega_d^2}} \cdot e^{-at}\sin(\omega_d t+\phi) = \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-D\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-D^2}t+\phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{z_1-a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)$$

$$\rightarrow \quad y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-D\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-D^2}t+\phi) \quad \text{mit} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)$$

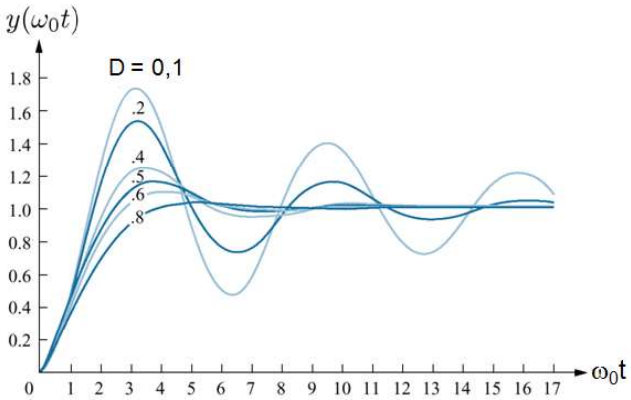
5.3 Periodisch gedämpftes System III

Andere Darstellung:

$$y(t) = 1 - e^{-D\omega_0 t}\left(cos(\omega_0\sqrt{1-D^2}\ t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cdot sin(\omega_0\sqrt{1-D^2}\ t)\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-D\omega_0 t}cos(\omega_0\sqrt{1-D^2}\ t-\phi') \quad \text{mit} \quad \phi' = tan^{-1}\left(\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\right)$$

Hiermit lässt sich der Einfluss unterschiedlicher D studieren:

- Je kleiner D, desto stärker schwingt die Sprungantwort.
- Die Zeitachse $\omega_0 t$ wurde auf die Eigenfrequenz ω_0 normiert. Daher verändert sich die Sprungantwort nicht mit der Eigenfrequenz.

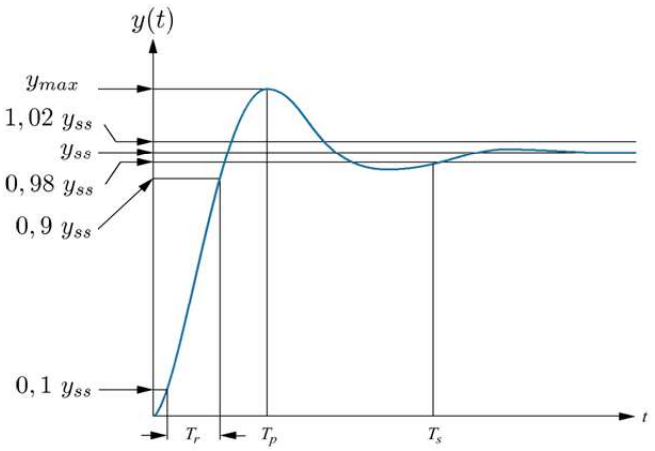


5.3 Periodisch gedämpftes System IV

Kennwerte der Sprungantwort

- **Anstiegszeit** T_r
  - Zeit für den Anstieg von 0,1 bis 0,9 des Endwertes y_{ss}.
- **Überschwingzeit** T_p
  - Zeit bis zum Erreichen des ersten Maximums y_{max} der Sprungantwort.
- **Maximales Überschwingen %OS**
  - Größtes Überschwingen der Sprungantwort in %.
- **Einstellzeit** T_s

  Zeit bis zum Erreichen und Verbleiben innerhalb von □ 2 % (□ 5 %) des Endwertes.



Vergleiche die Definitionen für Systeme erster Ordnung auf Seite 10.

5.3 Periodisch gedämpftes System V

Bestimmung der **Überschwingzeit** T_p („peak time“):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\,y(t)\right] = sY(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$= \frac{\frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1-D^2}}{(s + D\omega_0)^2 + \omega_0^2 \cdot (1-D^2)}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-D\omega_0 t} \cdot sin\left(\omega_0\sqrt{1-D^2}\;t\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \quad \omega_0\sqrt{1-D^2}\;t = n\pi \quad \rightarrow \quad t = \frac{n\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}}$$

Erstes Maximum bei *n* = 1 →

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}}$$

5.3 Periodisch gedämpftes System VI

Maximales Überschwingen *%OS* (sog. „percent overshoot“):

$$\%OS = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \cdot 100\%$$

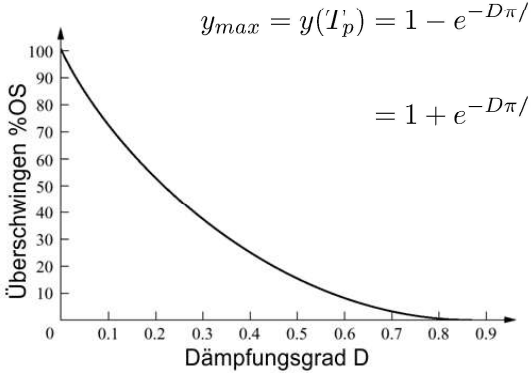
- aus

$$y(t) = 1 - e^{-D\omega_0 t}\left(\cos(\omega_0\sqrt{1-D^2}\ t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin(\omega_0\sqrt{1-D^2}\ t)\right)$$

- erhält man

$$y_{max} = y(T_p) = 1 - e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}}\left(\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin(\pi)\right)$$

$$= 1 + e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}}$$



Mit $y_{ss} = 1$ ergibt sich

$$\%OS = e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}} \cdot 100\%$$

5.3 Periodisch gedämpftes System VII

Bestimmung der **Einstellzeit** T_s

- Konservative Abschätzung über die Hüllkurve

$$\frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-D\omega_0 T_s} = 0,02$$

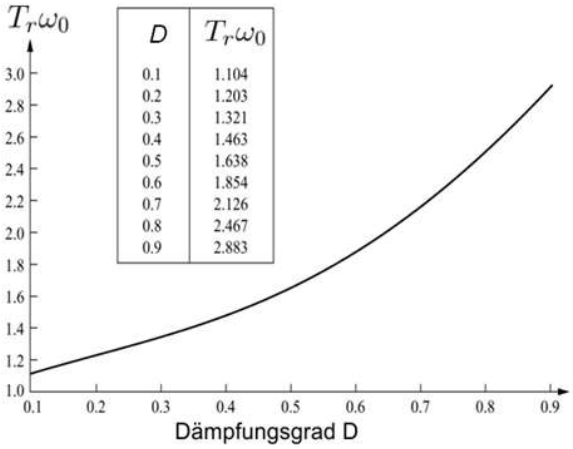
$$\rightarrow T_s = \frac{-ln\left(0,02\sqrt{1-D^2}\right)}{D\omega_0} \approx \frac{4}{D\omega_0}$$

unter der Annahme, dass

$$\cos(\omega_0\sqrt{1-D^2}\ t - \phi') = 1$$

für alle Zeiten.

- **Anstiegszeit** T_r („rise time“): hierzu gibt es keine analytische Ableitung.
  Eine Abschätzung ist durch folgende Grafik gegeben:



D	$T_r\omega_0$
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

5.3 Beispiel

Aufgabe: Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

- Bestimmen Sie T_p, $\%OS$, T_s und T_r der Sprungantwort.

Lösung:

- Berechnung von *D* und ω_0: $\omega_0 - 10 \left[\frac{1}{s}\right], D - 0{,}75$

- Berechnung von T_p, $\%OS$, T_s und T_r.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} = 0{,}475\ sec$$

$$\%OS = e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}} \cdot 100\% = 2{,}838\ \%$$

$$T_s = \frac{-ln\left(0{,}02\sqrt{1-D^2}\right)}{D\omega_0} \approx \frac{4}{D\omega_0} = 0{,}533\ sec$$

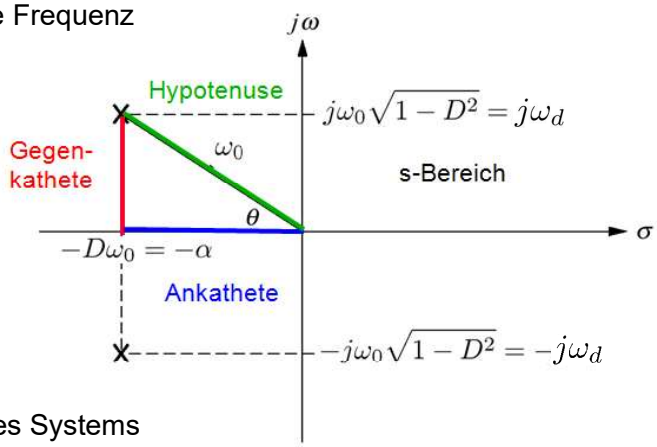
$$D = 0{,}75 \quad \rightarrow \quad T_r \cdot \omega_0 \approx 2{,}3 \quad \rightarrow \quad T_r = 0{,}23\ sec$$

5.3 Beziehung zwischen Eigenfrequenz, Dämpfungsgrad und Polkonfiguration I

1.) Sei ω_d die gedämpfte natürliche Frequenz

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Imaginärteil der Pole



2.) Sei α die relative Dämpfung des Systems

$$T_s = \frac{-ln\left(0.02\sqrt{1-D^2}\right)}{D\omega_0} \approx \frac{4}{D\omega_0} = \frac{4}{\alpha}$$

Realteil der Pole

3.) $D = \text{const.}$, weil

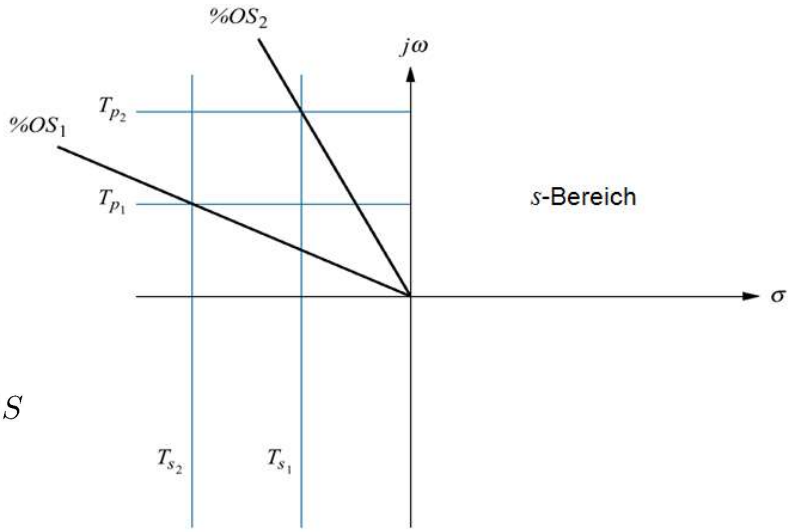
$\cos\theta = D\omega_0/\omega_0 = \text{const.}$

→ %OS konstant

5.3 Beziehung zwischen Eigenfrequenz, Dämpfungsgrad und Polkonfiguration II

Es ergeben sich:

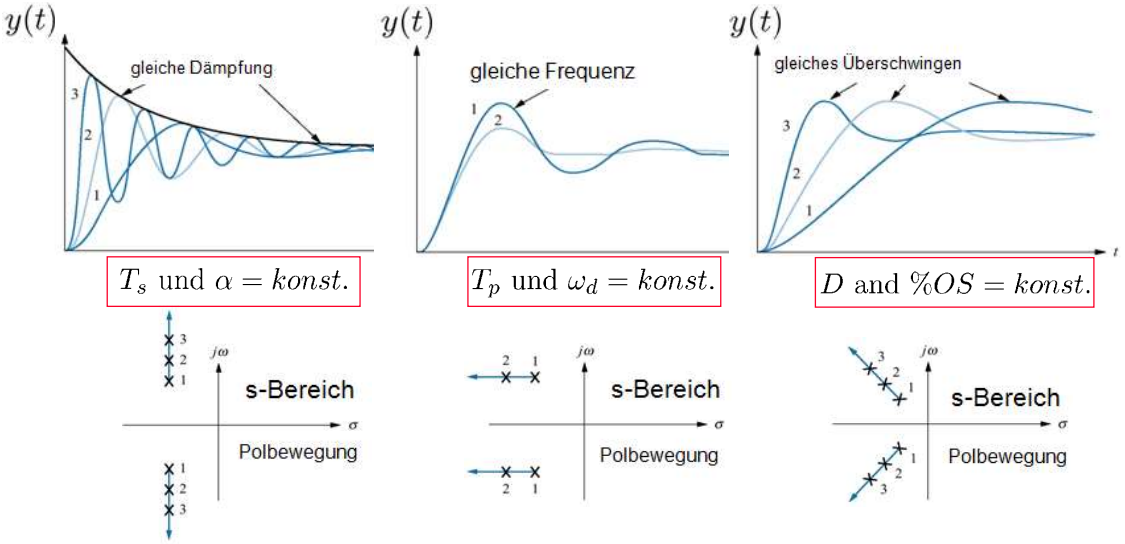
- Orte konstanter Überschwingzeiten $(T_{p2} < T_{p1})$ horizontal
- Orte konstanter Einschwingzeiten T_s $(T_{s2} < T_{s1})$ Vertikal
- Orte konstanten Überschwingens $\%OS$ $(\%OS_1 < \%OS_2)$



5.3 Beziehung zwischen Eigenfrequenz, Dämpfungsgrad und Polkonfiguration III

Sprungantworten eines Systems zweiter Ordnung als Funktion der Polkonfiguration

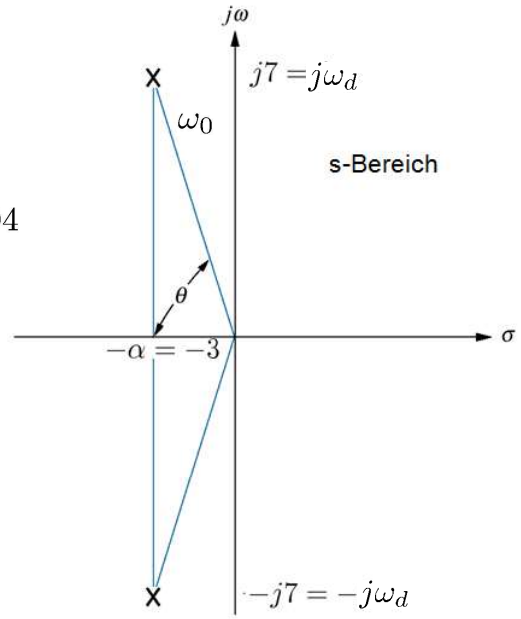
1. Realteil konstant
2. Imaginärteil konstant
3. Dämpfungsgrad konstant



5.3 Beispiel

Aufgabe:

- Gegeben ist die Polstellenverteilung. Bestimmen Sie D, ω_0, T_p, $\%OS$ und T_s.



Lösung:

$$D = cos\theta = cos\left(tan^{-1}(7/3)\right) = 0{,}394$$

$$\omega_0 = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7{,}616\ 1/sec$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} sec = 0{,}449\ sec$$

$$\%OS = e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}} \cdot 100\% = 26\ \%$$

$$T_s = \frac{4}{\alpha} = \frac{4}{3} sec = 1{,}333\ sec$$

Gliederung

5.1 Pole, Nullstellen und Übergangsverhalten
5.2 Systeme erster Ordnung
5.3 Systeme zweiter Ordnung
5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen
5.5 Einfluss zusätzlicher Nullstellen
5.6 Hausaufgaben

5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei ein System mit zwei konjugiert-komplexen Polen sowie mit einem dritten Pol bei $s = -\alpha_r$ auf der reellen Achse

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s + \alpha_r}, \; 0 \le D < 1$$

Sprungantwort: dominantes Polpaar

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s + D\omega_0) + C\omega_d}{(s + D\omega_0)^2 + \omega_d^2} + \frac{D_{pol}}{s + \alpha_r}$$

$$y(t) = A\,\sigma(t) + e^{-D\omega_0 t}\,(B\cos\omega_d t + C\sin\omega_d t) + D_{pol}e^{-\alpha_r t}$$

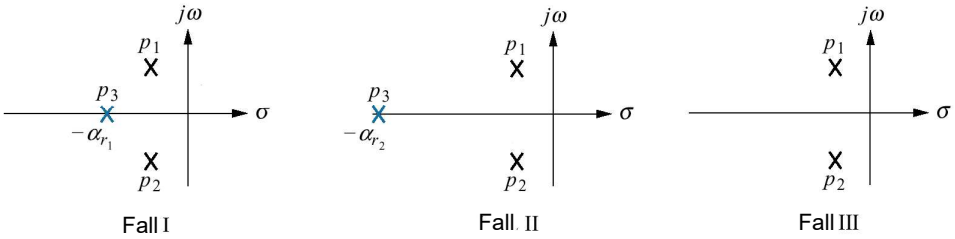
Fallunterscheidung:

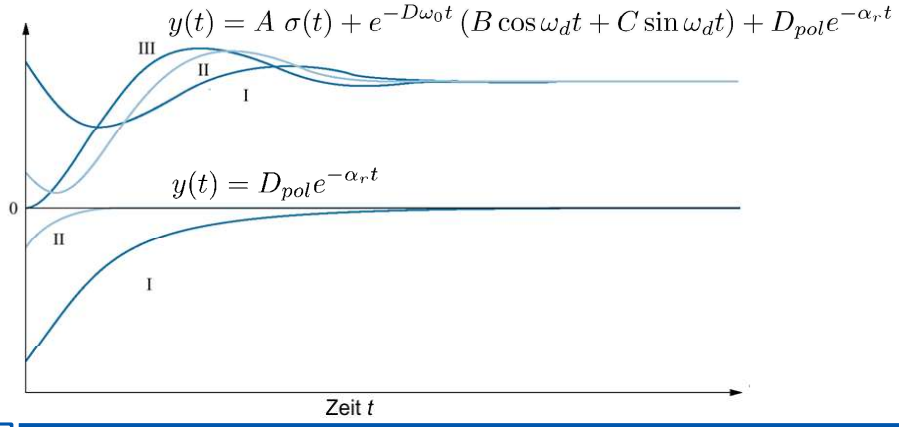
- Fall I: zusätzlicher Pol ist nahe dem konjugiert-komplexen Polpaar $(\alpha_r \approx D\omega_0)$
- Fall II: zusätzlicher Pol ist weit weg $(\alpha_r >> D\omega_0)$
- Fall III: zusätzlicher Pol ist sehr weit weg $(\alpha_r \to \infty)$

5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Sprungantwort der Teilsysteme





5.4 Beispiel

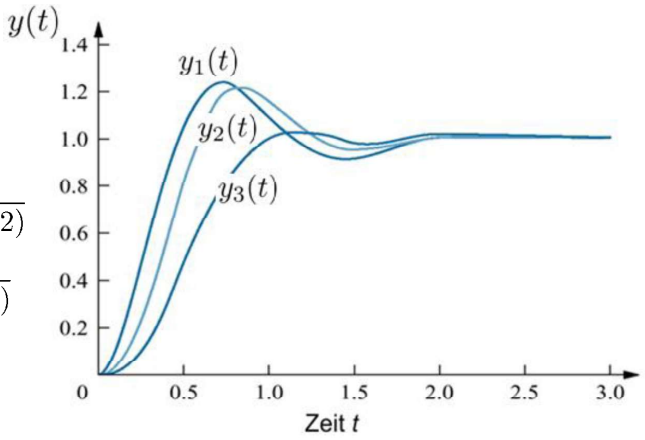
Was bedeutet das im Zeitbereich?

- Gegeben sind

$$G_1(s) = \frac{24.542}{s^2 + 4s + 24.542}$$

$$G_2(s) = \frac{245.42}{(s+10)(s^2 + 4s + 24.542)}$$

$$G_3(s) = \frac{73.626}{(s+3)(s^2 + 4s + 24.542)}$$



- Sprungantworten

$$y_1(t) = 1 - 1.09e^{-2t}\cos(4.532t - 23.8)$$
$$y_2(t) = 1 - 0.29e^{-10t} - 1.189e^{-2t}\cos(4.532t - 53.34)$$
$$y_3(t) = 1 - 1.14e^{-3t} + 0.707e^{-2t}\cos(4.532t + 78.63)$$

- $y_1(t)$ und $y_2(t)$ sind näher beieinander.

Gliederung

5.1 Pole, Nullstellen und Übergangsverhalten
5.2 Systeme erster Ordnung
5.3 Systeme zweiter Ordnung
5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen
5.5 Einfluss zusätzlicher Nullstellen
- **Sonderfall: nicht-minimalphasige Systeme**

5.6 Hausaufgaben

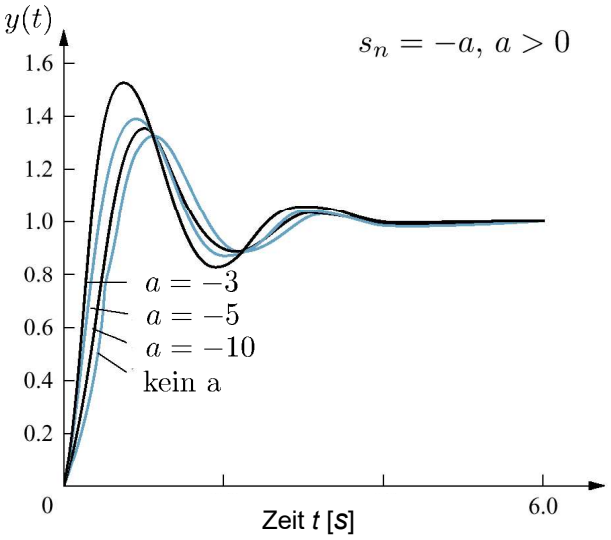
5.5 Einfluss zusätzlicher Nullstellen

Gegeben sei das System $G(s) = \dfrac{s+a}{(s+1+j2.828)\cdot(s+1-j2.828)}$

$$G(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)\cdot(s+c)} = \frac{A}{s+b} + \frac{B}{s+c} = \frac{\frac{a-b}{c-b}}{s+b} + \frac{\frac{a-c}{b-c}}{s+c}$$

Für $a >> c, b$

$$G(s) = a \cdot \left[\frac{\frac{1}{c-b}}{s+b} + \frac{\frac{1}{b-c}}{s+c} \right] = \frac{a}{(s+b)\cdot(s+c)}$$



Fazit: Zusätzliche negative Nullstellen machen das System schneller!

5.5 Einfluss positiver Nullstellen

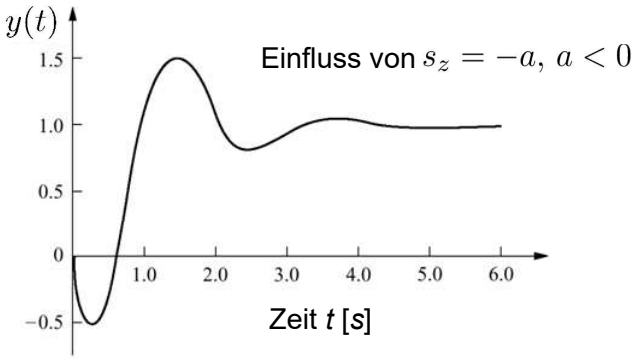
Frage: Was passiert eigentlich, wenn man Nullstellen in der rechten Halbebene hat ($s = -a$ mit $a < 0$)?

Antwort: Die Sprungantwort verläuft initial in die entgegengesetzte Richtung!

Solche Systeme nennt man „**nicht-minimalphasige Systeme**“

- Schwer zu regeln!
- Denken Sie an einen Piloten …

Beispiel:



5.5 Übertragungsfunktion eines nicht-minimalphasigen Systems I

Aufgabe:

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $U_0(s)/U_i(s)$
- Hinweis: für $R_1 = R_2$ wird dieses System als **Allpass-Filter** bezeichnet. Ein solches System lässt Signale über einen großen Frequenzbereich ohne Abschwächung oder Verstärkung der Amplitude passieren.

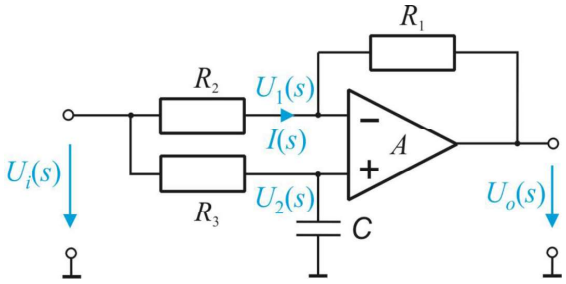
Lösung :

- Wir stellen fest, dass

$$I(s) = \frac{U_i(s) - U_o(s)}{R_1 + R_2}$$

und

$$U_o(s) = A(U_2(s) - U_1(s)).$$



5.5 Übertragungsfunktion eines nicht-minimalphasigen Systems II

- Weiterhin gilt $U_1(s) = U_o(s) + I(s)R_1$ (Rückkopplungs-Masche).
- Durch Einsetzen bekommen wir

$$U_1(s) = U_o(s) + I(s)R_1 = \frac{1}{R_1 + R_2}\left(R_1 U_i(s) + R_2 U_o(s)\right)$$

und können $I(s)$ ersetzen.

- Spannungsteiler-Regel für den zweiten Zweig ergibt

$$U_2(s) = U_i(s)\frac{\frac{1}{Cs}}{R_3 + \frac{1}{Cs}}$$

- Schließlich

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = A(U_2(s) - U_1(s)) = \lim_{A\to\infty} \frac{A(R_2 - R_1 R_3 C s)}{(R_3 C s + 1)(R_1 + R_2(1+A))}$$

$$= -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{s - \frac{R_2}{R_1 R_3 C}}{s + \frac{1}{R_3 C}} = -\frac{s - 10}{s + 10}$$

für z.B. $R_1 = R_2$ und $R_3 C = \frac{1}{10}$

… das ist ein Allpass 1. Ordnung

5.5 Übertragungsfunktion eines nicht-minimalphasigen System III

- Sprungantwort

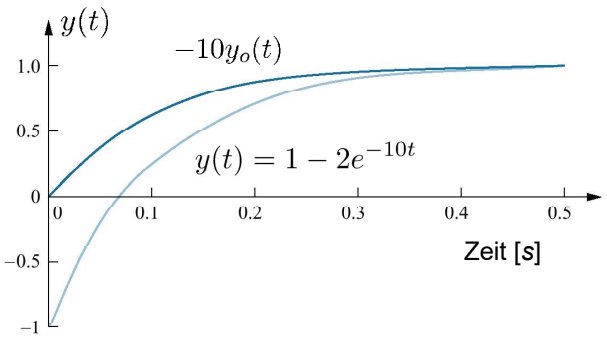
$$Y(s) = -\frac{s-10}{s(s+10)} = -\frac{1}{s+10} + 10\frac{1}{s(s+10)} = sY_o(s) - 10Y_o(s)$$

wobei $$Y_o(s) = -\frac{1}{s(s+10)}$$

die Laplace-Transformierte der Systemantwort ohne Nullstelle ist.

$$Y(s) = -\frac{1}{s+10} + 10\frac{1}{s(s+10)} = -\frac{1}{s+10} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+10}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = 1 - 2e^{-10t}$$



$$Y_o(s) = -\frac{1/10}{s} + \frac{1/10}{s+10}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y_o(t) = -0.1(1 - e^{-10t})$$

Gliederung

5.1 Pole, Nullstellen und Übergangsverhalten
5.2 Systeme erster Ordnung
5.3 Systeme zweiter Ordnung
5.4 Einfluss zusätzlicher Polstellen
5.5 Einfluss zusätzlicher Nullstellen
5.6 Hausaufgaben

5.6 Hausaufgaben

Diesmal nur das Skript lesen …

6. Dynamisches Verhalten linearer Regelungssysteme

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

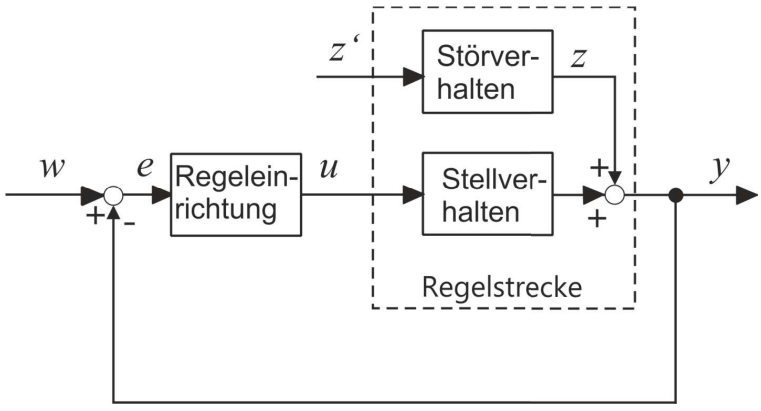
Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

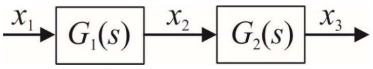
6.1 Wiederholung: Blockschaltbildumformung
6.2 Besondere Übertragungsglieder
6.3 Prinzip der Rückkopplung und der Regelung
6.4 Eigenschaften geregelter Systeme
6.5 Beispiel
6.6 Hausaufgaben

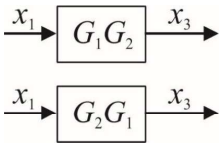


Nach: p.13, aus H. Unbehauen, „Regelungstechnik I", 14. Auflage, Vieweg, 2007

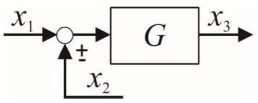
6.1 Vereinfachung von Blockschaltbildern I

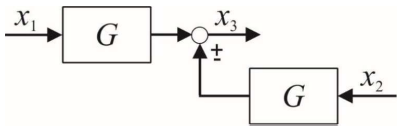
Zur Wiederholung:

1. Serienschaltung 

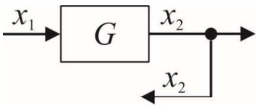
oder 

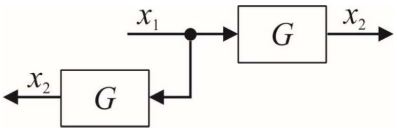
2. Verschiebung eines Summenpunktes hinter einen Block





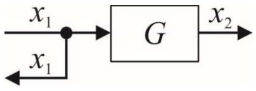
3. Verschiebung eines Abgriffes vor einen Block

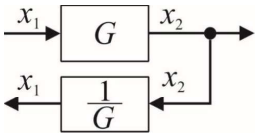




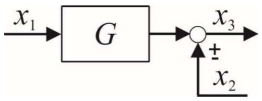
6.1 Vereinfachung von Blockschaltbildern II

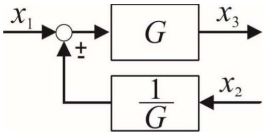
4. Verschiebung eines Abgriffs hinter einen Block



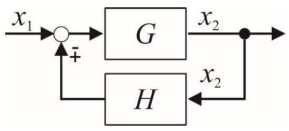


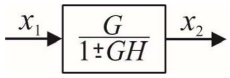
5. Verschiebung eines Summenpunktes vor einen Block





6. Elimination eines rückgekoppelten Kreises





Gliederung

6.1 Wiederholung: Blockschaltbildumformung
6.2 Besondere Übertragungsglieder
6.3 Prinzip der Rückkopplung und der Regelung
6.4 Eigenschaften geregelter Systeme
6.5 Beispiel
6.6 Hausaufgaben

6.2 Besondere Übertragungsglieder

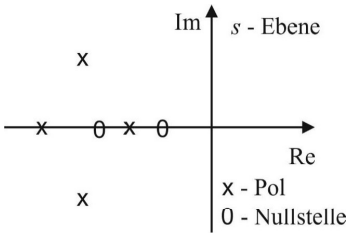
Übertragungsglieder mit phasenminimalem Verhalten

z.B. P, I, D, PT_1, PT_2, PT_n, DT_1, PDT_1 etc.

Übertragungsglieder mit **phasenminimalem Verhalten** zeichnen sich durch folgende Merkmale aus:

- alle Nullstellen liegen in der linken s-Halbebene
- keine Totzeit
- stabile oder grenzstabile Pole

  → keine Pole in der rechten Halbebene



Die besondere Bedeutung phasenminimaler Übertragungsglieder liegt in dem funktionalen Zusammenhang zwischen Amplituden- und Phasenbeziehung des sog. „Frequenzganges“ (siehe übernächste Vorlesung). Eine Änderung des Betrags $|G(j\omega)|$ mit ω ist hier stets mit einer **minimalen Änderung der Phase** $\varphi(\omega)$ verbunden.

- Aus diesem Grund reicht zur vollständigen Beschreibung eines phasenminimalen Übertragungsgliedes bzw. Systems allein der Amplitudengang des Frequenzgangs aus, da aus ihm auch der Phasenverlauf berechnet werden kann und umgekehrt.

6.2 Elementare Übertragungsglieder I

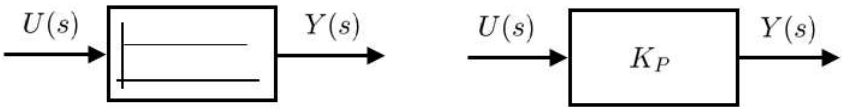
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Proportionalglied (abgek. **P-Glied**)

- Konstanter Eingang → konstanter Ausgang

$$a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = K_P \; u(t)$$

- Blockschaltbilddarstellung: Symbole des P-Glieds



Integrierglied (abgek. **I-Glied**)

- Konstanter Eingang → Rampenförmiger Ausgang

$$a_1 \dot{y}(t) = b_0 u(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = K_I \int_0^t u(\tau) \; d\tau = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(\tau) \; d\tau$$

- Blockschaltbilddarstellung: Symbole des I-Glieds

6.2 Elementare Übertragungsglieder II

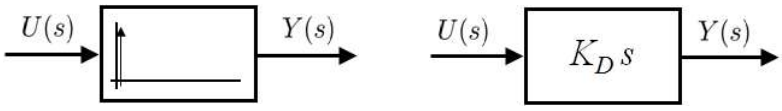
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Differenzierglied (abgek. **D-Glied**)

- Konstanter Eingang → δ-Impuls im Ursprung am Ausgang

$$a_0 y(t) = b_1 \dot{u}(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = K_D \; \dot{u}(t)$$
$$y(t) = T_D \; \dot{u}(t)$$

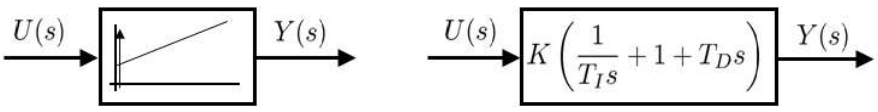
- Blockschaltbilddarstellung: Symbole des D-Glieds



Zusammengesetzes Übertragungsglied (abgek. **PID-Glied**)

$$y(t) = \; K_P \; u(t) + K_I \int_0^t u(\tau) \; d\tau + K_D \; \dot{u}(t)$$

- Blockschaltbilddarstellung: Symbole des PID-Glieds



6.2 Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT_1-Glied) I

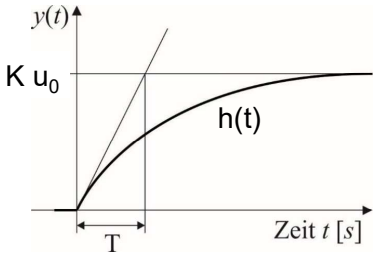
Ein **„Verzögerungsglied“** 1. Ordnung besteht aus einem Speicher und einem Widerstand und wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad \text{bzw. } T\dot{y}(t) + y(t) = K u(t)$$
$$\text{mit } T = \frac{a_1}{a_0} \text{ und } K = \frac{b_0}{a_0}$$

Ein PT_1-Glied antwortet **verzögernd** auf einen Sprung der Höhe u_0 :

$$y(t) = u_0 \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

- *T* wird **Zeitkonstante** und *K* wird **Verstärkungsfaktor** des Verzögerungsgliedes genannt.
- Als Wiederholung:
  - Merke: die Zeitkonstante *T* ist gleich dem Abschnitt, den die Tangente im Ursprung der Übergangsfunktion $h(t)$ an der Endwertlinie herausschneidet.



6.2 Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT_1-Glied) II

Durch die Laplace-Transformation der Differentialgleichung erhält man die **Übertragungsfunktion des PT_1–Gliedes**.

- Merke: Ein Verzögerungsglied 1. Ordnung besitzt keine Nullstelle.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + T \cdot s} = \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{\frac{K}{T}}{s - s_1}$$

- Blockschaltbild: Symbol des PT_1-Glieds

6.2 Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT_2-Glied) I

Ein Verzögerungsglied 2. Ordnung wird im Allgemeinen durch die Dgl.

$$a_2\ \ddot{y}(t) + a_1\ \dot{y}(t) + a_0\ y(t) = b_0\ u(t)$$

$$\text{bzw. } T_2^2\ \ddot{y}(t) + T_1\ \dot{y}(t) + y(t) = K\ u(t)$$

beschrieben.

In dieser Schreibweise beschreibt:

- die **Kennkreisfrequenz** $\omega_0 = \dfrac{1}{T_2}$ die Eigenfrequenz des dämpfungslos gedachten Systems $(T_1 = 0)$.
- der **Dämpfungsgrad** $D = \dfrac{T_1}{2\,T_2} = \dfrac{T_1}{2}\ \omega_0$ (oft auch nur mit „Dämpfung“ bezeichnet) ein Maß für das Abklingen einer Schwingung.

6.2 Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT_2-Glied) II

Mit diesen Parametern lautet die Differentialgleichung des PT_2-Gliedes:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{y}(t) + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$$

- Merke: durch die Angabe der Kennwerte $T_1,\ T_2,\ K$ oder $D,\ \omega_0,\ K$ ist ein PT_2-Glied eindeutig bestimmt.

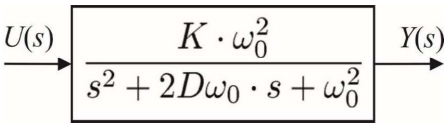
Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + T_1 \cdot s + T_2^2 \cdot s^2} = \frac{K}{1 + \frac{2D}{\omega_0} \cdot s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$$

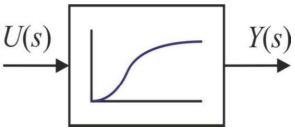
$$= \frac{K \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2D\omega_0 \cdot s + s^2} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

6.2 Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT_2-Glied) III

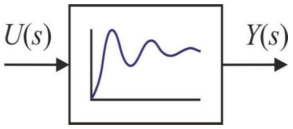
- Blockschaltbild: Symbol des PT_2-Glieds



- Blockdarstellung $(D > 1)$



Blockdarstellung $(0 \leq D \leq 1)$



6.2 Verzögerungsglieder n-ter Ordnung (PT_n-Glieder) I

Reale physikalische Systeme besitzen häufig mehrere Speicher und damit zusätzlich verzögerndes Verhalten im Vergleich zu Systemen erster und zweiter Ordnung. Deshalb treten in den zugehörigen Differentialgleichungen höhere Ableitungen der Ausgangsgröße $y(t)$ auf.

$$a_n \; y^{(n)}(t) + ... + a_2 \; \ddot{y}(t) + a_1 \; \dot{y}(t) + y(t) = K \; u(t)$$

Die zugehörige *Übertragungsfunktion* eines solchen PT_n-Gliedes lautet

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + a_1 \cdot s + ... + a_n \cdot s^n}$$

Sie lässt sich in PT_1- und PT_2-Glieder zerlegen, so dass ein PT_n-Glied lautet

$$G(s) = \frac{\frac{K}{a_n}}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot ... \cdot (s - s_n)} \quad \forall \quad s_i = -\alpha_i \pm j\omega_i, \quad i = 1, 2, ...m, \; m \leq n$$

6.2 Verzögerungsglieder n-ter Ordnung (PT_n-Glieder) II

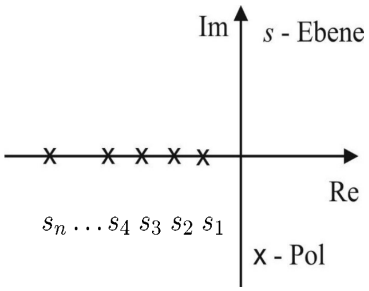
Stabile PT_n-Glieder verfügen deshalb über n reelle und/oder konjugiert komplexe Pole in der linken s-Halbebene. Reine PT_n-Glieder haben keine Nullstellen.

Es ergeben sich folgende Fälle:

1. Polverteilung bei reellen, verschiedenen Polen

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)\cdot \ldots \cdot (1+T_n s)}$$

$$s_i = -\alpha_i = -\frac{1}{T_i}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

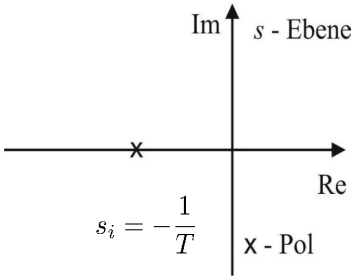


6.2 Verzögerungsglieder n-ter Ordnung (PT_n-Glieder) III

2. Polverteilung bei reellen, mehrfachen Polen

$$G(s) = \frac{K}{(1+Ts)^n} = \frac{\frac{K}{T^n}}{(s-s_i)^n}$$

$$s_i = -\alpha_i = -\frac{1}{T}, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

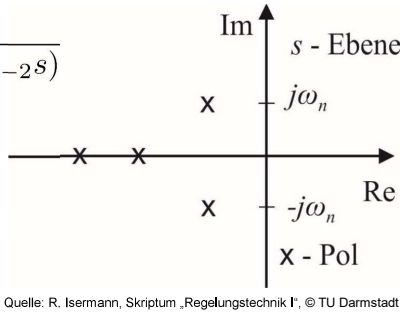


3. Konjugiert komplexe und reelle Pole

$$G(s) = \frac{K}{(1+2DTs+T^2s^2)\cdot(1+T_1 s)\ldots\cdot(1+T_{n-2}s)}$$

$$s_i = -\alpha_i = -\frac{1}{T_i}, \quad i = 1, 2, \ldots n-2$$

$$s_{n-1,n} = -\alpha_n \pm j\omega_n$$



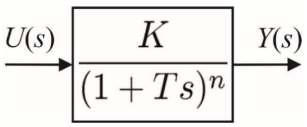
Quelle: R. Isermann, Skriptum „Regelungstechnik I", © TU Darmstadt

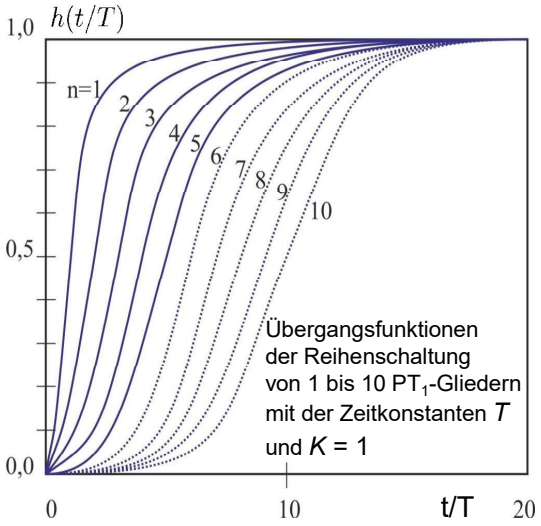
6.2 Verzögerungsglieder n-ter Ordnung (PT_n-Glieder) IV

Beispiel:

- Übergangsfunktion $h(t)$ bei reellen, mehrfachen Polen

- Die Sprungantwort einer Hintereinanderschaltung von n gleichen Verzögerungsgliedern 1. Ordnung mit der Gesamtverstärkung K wird durch die folgende Gleichung beschrieben:





$$y(t) = h(t) = K \cdot u_0 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{t}{T} + \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\frac{t}{T}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{-\frac{t}{T}} \right\}$$

Quelle: R. Isermann, Skriptum „Regelungstechnik I", © TU Darmstadt

6.2 Vorhalteglieder

Besteht die Übertragungsfunktion nur aus einem Zählerpolynom

$$\begin{aligned} G(s) = B(s) &= b_0 + b_1\, s + b_2\, s^2 + \ldots + b_m\, s^m \\ &= K\left(1 + T_{D1}\, s + T_{D2}^2\, s^2 + \ldots + T_{Dm}^m\, s^m\right), \end{aligned}$$

dann besitzen diese Übertragungsglieder **voreilende Phasenwinkel**. Sie werden deshalb **„Vorhalteglieder"** genannt.

6.2 Vorhalteglied 1. Ordnung (PD-Glied) I

Das Vorhalteglied 1. Ordnung ohne Verzögerung (**PD-Glied**) besitzt ein sowohl proportionales als auch differenzierendes Übertragungsverhalten.

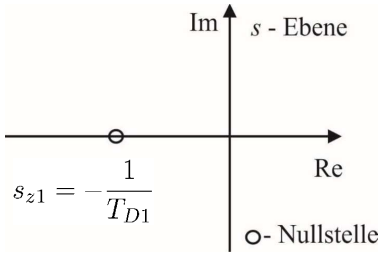
$$y(t) = b_0\ u(t) + b_1\ \dot{u}(t)$$

Seine **Übertragungsfunktion** lautet:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + b_1\ s = K \cdot (1 + T_{D_1} s)$$

Ein PD-Glied besitzt eine Nullstelle bei

$$s_{z_1} = -\frac{1}{T_{D_1}}$$



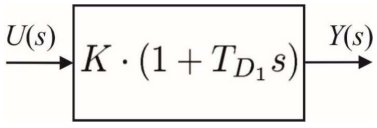
Quelle: R. Isermann, Skriptum „Regelungstechnik I", © TU Darmstadt

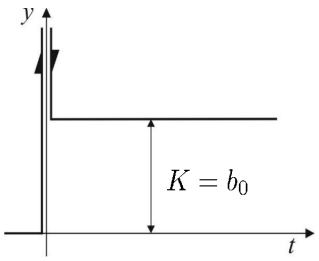
6.2 Vorhalteglied 1. Ordnung (PD-Glied) II

Übergangsverhalten (Sprungantwort)

- Durch die Differentiation wird die zu einer sprungförmigen Änderung der Eingangsgröße $u(t)$ zugehörige Ausgangsgröße $y(t)$ für $t = 0$ unendlich groß (δ - Impuls).

- Daher lässt sich ein reines PD-Glied physikalisch nicht realisieren.





Quelle: R. Isermann, Skriptum „Regelungstechnik I", © TU Darmstadt

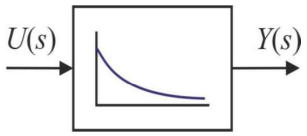
6.2 Weitere Zusammengesetzte Übertragungsglieder

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Vorhalteglied mit Verzögerung (**DT_1-Glied**)

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t)$$
$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = K_D\dot{u}(t)$$

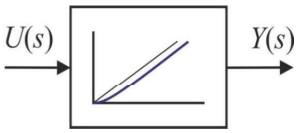
$$G(s) = \frac{K_D \cdot s}{1 + T_1 s}$$



Verzögerndes Integrierglied (**IT_1-Glied**)

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) = b_0 u(t)$$
$$T_1\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_1 u(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K_1}{1 + T_1 s}$$



6.2 Ein Wort zur Systematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei ein allgemeines Übertragungsglied.

- Es handelt sich um ein $\mathrm{P\,I_l\,D_m\,T_n}$-Übertragungsglied, d,h, mit einem I-Anteil l-ter, einem D-Anteil m-ter und einem Verzögerungsanteil n-ter Ordnung.

$$G(s) = K\frac{(1 + T_{D1}s) \cdot (1 + T_{D2}s) \cdot \ldots \cdot (1 + T_{Dm}s)}{s^l \cdot (1 + T_1 s) \cdot (1 + T_2 s) \cdot \ldots \cdot (1 + T_n s)}$$

D-Anteil

$$= \frac{K}{s^l} \cdot \frac{1 + (T_{D1} + T_{D2} + \ldots + T_{Dm}) \cdot s + \ldots + (T_{D1} \cdot T_{D2} \cdot \ldots \cdot T_{Dm}) \cdot s^m}{1 + (T_1 + T_2 + \ldots + T_n) \cdot s + \ldots + (T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n) \cdot s^n}$$

P-Anteil

I-Anteil

T-Anteil

Achtung: diese Nomenklatur ist **nicht eindeutig**.
Sie gilt nur für die ***Serienschaltung von Elementargliedern*** …

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

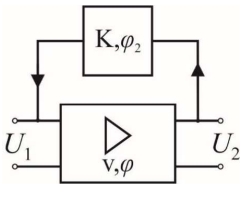
6.1 Wiederholung: Blockschaltbildumformung
6.2 Besondere Übertragungsglieder
6.3 Prinzip der Rückkopplung und der Regelung
6.4 Eigenschaften geregelter Systeme
6.5 Beispiel
6.6 Hausaufgaben

6.3 Das Prinzip der Rückkopplung

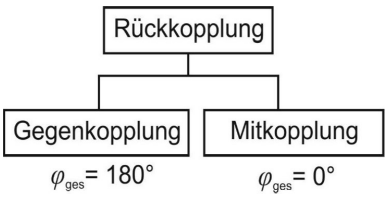
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Grundlegendes Prinzip der Natur → insb. zur Ausregelung von Störungen.

Rückkopplung bedeutet, einen Ausgang auf den Eingang eines Systems zurückzuführen.



http://www.dj4uf.de/lehrg/a07/Bild7-03.gif



- Positive Rückkopplung („Mitkopplung“): tendiert zur Destabilisierung → System beginnt schwingen → so kann man Oszillatoren bauen …
- Negative Rückkopplung („Gegenkopplung“): tendiert zur Stabilisierung eines Systems.

6.3 Das Prinzip der Regelung I

Beachte: eine **Regelung** wird i.d.R. durch eine **negative Rückkopplung** realisiert.

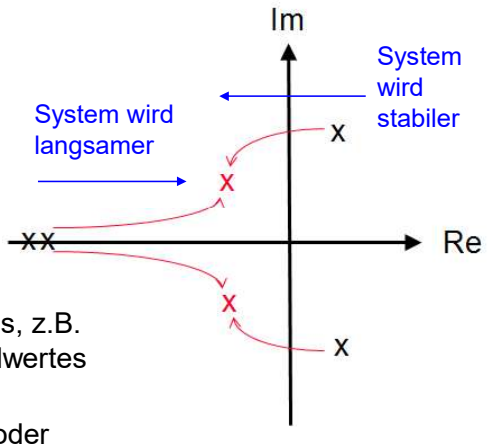
Erinnern wir uns: Aufgaben einer Regelung (vgl. 1. Vorlesung):

- Eine bestimmte physikalische Größe auf einen vorgegebenen Wert bringen und diesen Wert halten → **Führungsübertragungsfunktion**
- Den Einfluss von Störgrößen mindern oder völlig kompensieren (ausregeln) → **Störübertragungsfunktion**
- Einen schwach gedämpften Prozess stärker dämpfen → **Formung der Sprungantwort, Führungsübertragungsfunktion**
- Schnellere Änderungen der Ausgangsgröße erzielen als ohne Regelung → **Formung der Sprungantwort, Führungsübertragungsfunktion**
- Einen instabilen Prozess stabilisieren → **Stabilität** (nächste Vorlesung)
- Parameteränderungen des Prozesses abschwächen → **Robustheit**

6.3 Das Prinzip der Regelung II

Durch die Rückkopplung können wir:

- die Lage der dominanten Pole und damit die wesentliche Dynamik des Gesamtsystems beeinflussen
- zusätzliche Pole oder Nullstellen hinzufügen
- unerwünschte Pole kompensieren.



Verschiebung von Polen durch Rückkopplung

Was bringt das?

- z.B. Modifikation des dynamischen Verhaltens, z.B. schnellere Reaktion auf Änderungen des Sollwertes bei langsamen Prozessen
- z.B. Stabilisierung bei schwach gedämpften oder instabilen Systemen

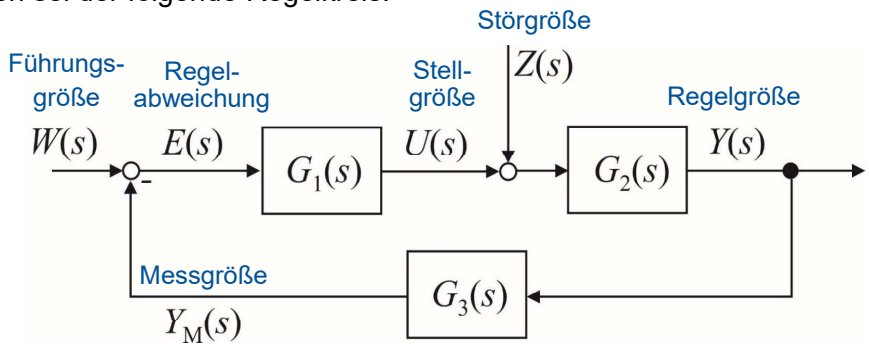
- Merke: Weiter rechts liegende Pole dominieren das Systemverhalten.

Gliederung

6.1 Wiederholung: Blockschaltbildumformung
6.2 Besondere Übertragungsglieder
6.3 Prinzip der Rückkopplung und der Regelung
6.4 Eigenschaften geregelter Systeme
6.5 Beispiel
6.6 Hausaufgaben

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme I

Gegeben sei der folgende Regelkreis:



Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises: „Schleifenübertragungsfunktion“

$$G_0(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

Sei $Z(s) = 0$. Dann gilt:

$$E(s) = W(s) - G_0(s) \cdot E(s) \quad \rightarrow \quad E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot W(s)$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme II

Entsprechend ergibt sich die **Führungsübertragungsfunktion** zu

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_0(s)}$$

- Merke:

$$\frac{\text{Vorwärtsübertragungsfunktion (von } W \text{ zu } Y)}{1 + \text{Schleifenübertragungsfunktion}}$$

- Achtung: Im Buch „Systemtheorie“ von Herrn Prof. Ascheid wird eine etwas andere Nomenklatur verwendet. Hier wird die Führungsübertragungsfunktion als $T_W(s)$ bezeichnet, $G_W(s)$ ist dort die Vorwärtsübertragungsfunktion

Sei $W(s) = 0$. Dann ist die **Störübertragungsfunktion**

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_0(s)}$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme III

Als sog. „**dynamischen Regelfaktor**“ bezeichnen wir:
(Von manchen Autoren auch als „*Empfindlichkeitsfunktion*“ bezeichnet.)

$$R(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

- Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot R(s)$$

- Störübertragungsfunktion

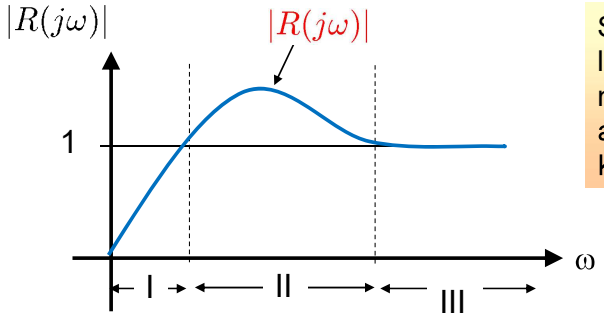
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = G_2(s) \cdot R(s)$$

- Merke: der dynamische Regelfaktor drückt aus, was durch das Schließen des Regelkreises an Dynamik zum offenen Regelkreis hinzukommt …

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme IV

Wegen $G_z(s) = G_2(s) \cdot R(s)$ kann ein Regelkreis Störgrößen nur wie folgt beeinflussen:

- Im Bereich niederer Frequenzen (Bereich I) können durch die Schließung des Regelkreises Störungen gemindert werden.
- Ein Regelkreis verstärkt Störungen im Frequenz-Bereich II.
- Hochfrequente Störungen (Frequenz-Bereich III) können nicht beeinflusst werden.



Solche Kurven lernen wir in der nächsten Woche als „Frequenzgang“ kennen …

Im Beispiel:

- Betrag des dynamischen Regelfaktors für PT_n-Strecke mit P-Regler

6.4 Robustheit: Parameteränderungen I

Betrachte folgende Änderung der Regelstreckeneigenschaft:

$$G_2 \;\rightarrow\; G_2 + \Delta G_2$$

1. Einfluss auf System **mit Rückkopplung**

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3} \;\rightarrow\; G'_W = \frac{G_1 \cdot (G_2 + \Delta G_2)}{1 + G_1 \cdot (G_2 + \Delta G_2) \cdot G_3}$$

- Näherung von $G'_W = G_W + \Delta G_W$ durch Linearisierung

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$G'_W \approx G_W + \left.\frac{dG_W}{dG_2}\right|_{G_2} \cdot \Delta G_2 = \frac{G_1 G_2}{1 + G_0} + \frac{G_1}{(1 + G_0)^2} \cdot \Delta G_2$$

- Ausgangssignal ohne Änderung bzw. mit Änderung

$$Y = G_W \cdot W \text{ und } Y + \Delta Y = (G_W + \Delta G_W) \cdot W \;\Rightarrow\; \Delta Y = \Delta G_W W$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_W}{G_W} = \frac{G_1 \Delta G_2}{(1 + G_0)^2} \cdot \frac{1 + G_0}{G_1 G_2} = \frac{\Delta G_2}{G_2 (1 + G_0)}$$

mit Rückkopplung

6.4 Robustheit: Parameteränderungen II

Betrachte folgende Änderung der Regelstreckeneigenschaft:

$$G_2 \;\rightarrow\; G_2 + \Delta G_2$$

2. Einfluss auf System **ohne Rückkopplung**:

- Ausgangssignal ohne Änderung bzw. mit Änderung

$$Y = G_1 G_2 \cdot W$$

$$Y + \Delta Y = (G_1 G_2 + G_1 \Delta G_2) \cdot W \;\Rightarrow\; \Delta Y = G_1 \Delta G_2 \cdot W$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_2}{G_2}$$ Einfluss bei System ***ohne*** Rückkopplung

- Vergleich: mit Rückkopplung / ohne Rückkopplung
- Die Empfindlichkeit S des Systems auf Parameteränderungen ΔG_2 ist reduziert um $1/(1+G_0)$

$$S_{G_2} = \frac{\Delta Y/Y|_{\text{mitRK}}}{\Delta Y/Y|_{\text{ohneRK}}} = \frac{\Delta G_2/G_2}{(1+G_0)\Delta G_2/G_2} = \frac{1}{1+G_0}$$ günstig $G_0(s) \rightarrow \infty$

Merke: Eine Rückkopplung reduziert den Einfluß von Änderungen der Regelstrecke

6.4 Robustheit: Parameteränderungen III

Betrachte Änderung des Messglieds:

$$G_3 \;\rightarrow\; G_3 + \Delta G_3$$

1. Einfluss auf das System **mit Rückkopplung**

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3} \;\rightarrow\; \tilde{G}_W = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 (G_3 + \Delta G_3)}$$

- Näherung von $\tilde{G}_W = G_W + \Delta G_W$ durch Linearisierung (wieder Quotientenregel beachten)

$$\tilde{G}_W \approx G_W + \left.\frac{dG_W}{dG_3}\right|_{G_3} \cdot \Delta G_3 = \frac{G_1 G_2}{1+G_0} - \frac{(G_1 G_2)^2}{(1+G_0)^2} \cdot \Delta G_3$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_W}{G_W} = \frac{-(G_1 G_2)^2}{(1+G_0)^2} \cdot \Delta G_3 \cdot \frac{1+G_0}{G_1 G_2} = \frac{-G_1 G_2}{1+G_0} \cdot \Delta G_3 = -\frac{G_0}{1+G_0} \cdot \frac{\Delta G_3}{G_3}$$

Einfluss bei Systemveränderung ***mit*** Rückkopplung

6.4 Robustheit: Parameteränderungen IV

Betrachte Änderung des Messglieds:

$$G_3 \;\rightarrow\; G_3 + \Delta G_3$$

2. Einfluss auf System **ohne Rückkopplung**: Ausgangssignal ohne Änderung bzw. mit Änderung

$$Y_M(s) = (G_3 + \Delta G_3) \cdot Y(s)$$

- Falls die Regelung arbeiten würde, wäre $Y_M(s) \approx W$

$$Y_M = G_3 Y \;\rightarrow\; Y_M = (G_3 + \Delta G_3) \cdot (Y + \Delta Y)$$
$$\approx G_3 Y + (G_3 + \Delta G_3) \cdot \Delta Y + \Delta G_3 Y$$

Einfluss bei System ***ohne*** Rückkopplung

$$(G_3 + \Delta G_3) \cdot \Delta Y = -\Delta G_3 Y \;\Leftrightarrow\; \frac{\Delta Y}{Y} = -\frac{\Delta G_3}{G_3 + \Delta G_3} \approx -\frac{\Delta G_3}{G_3}$$

- Die Empfindlichkeit S des Systems auf Parameteränderungen ΔG_3 ist

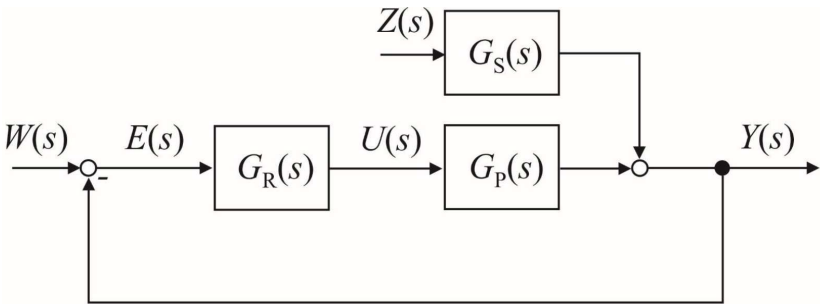
$$S_{G_3} = \frac{\Delta Y/Y|_{\text{mitRK}}}{\Delta Y/Y|_{\text{ohneRK}}} = \frac{G_0}{1 + G_0}$$

ungünstig $G_0(s) \rightarrow \infty$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme I

Standard-Regelkreis mit Modellannahme

- die Störung wird additiv am Systemausgang angenommen



$$Y(s) = G_R(s) \cdot G_P(s) \cdot R(s) \cdot W(s) + G_S(s) \cdot R(s) \cdot Z(s)$$

$$\text{mit} \quad R(s) = \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_P(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme II

Eigenverhalten eines Standard-Regelkreises:

- Für $W(s) = 0$ und $Z(s) = 0$ ergibt sich

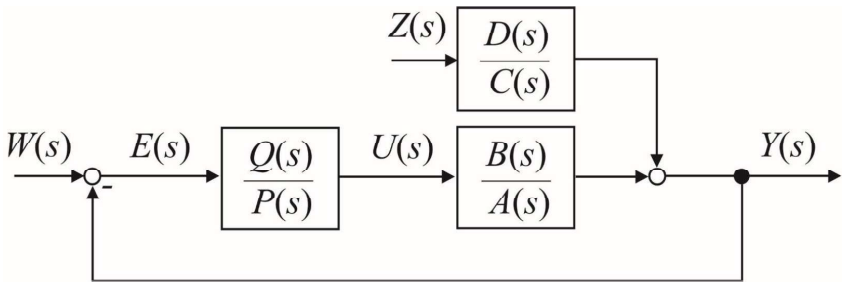
$$(1 + G_0(s)) \cdot Y(s) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 + G_0(s) = 0$$

- Dies ist die sog. „**charakteristische Gleichung**“ des Regelkreises.

- Sie bestimmt die Eigendynamik, mit der Anfangsbedingungen im geschlossenen Regelkreis abklingen
- Sie bestimmt auch die Stabilitätseigenschaften (siehe spätere Vorlesung)

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme III

Pole und Nullstellen:



Der Prozess (die Regelstrecke) sei gegeben durch

$$G_P(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0)} = \frac{b_m (s - s_m)(s - s_{m-1})...}{a_n (s - s_n)(s - s_{n-1})...}, \; m \leq n$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme IV

Der dynamische Regelfaktor ergibt sich zu

$$R(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{1}{1+\frac{Q(s)\cdot B(s)}{P(s)\cdot A(s)}} = \frac{P(s)\cdot A(s)}{P(s)\cdot A(s)+Q(s)\cdot B(s)}$$

Führungsübertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{P(s)\cdot A(s)}{P(s)\cdot A(s)+Q(s)\cdot B(s)} \cdot \frac{Q(s)}{P(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{Q(s)\cdot B(s)}{P(s)\cdot A(s)+Q(s)\cdot B(s)}$$

Störübertragungsfunktion

$$G_z(s) = \frac{P(s)\cdot A(s)}{P(s)\cdot A(s)+Q(s)\cdot B(s)} \cdot \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{P(s)A(s)D(s)}{(P(s)A(s)+Q(s)B(s))\cdot C(s)}$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme V

Der Vergleich mit der offenen Regelstrecke liefert:

1. Pole :
   - Prozesspole $A(s)=0$ werden verändert zu den Polen $[P(s)A(s)+Q(s)B(s)]=0$ des geschlossenen Regelkreises.
   - Nullstellen $B(s)=0$ der Regelstrecke beeinflussen die Pole des Regelkreises.
   - Beim Störverhalten kommt auch noch $C(s)$ hinzu.
2. Nullstellen:
   - Die Lage der Nullstellen hängt vom Eingriffsort der Störeinwirkung ab.

Anmerkungen:

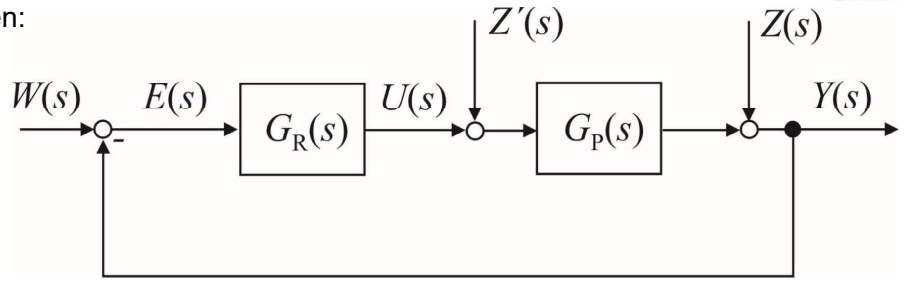
a) Lineare Regler verändern das Eigenverhalten (Pole) im Vergleich zur offenen Regelstrecke.

b) Durch geeignete Wahl von $Q(s)$ und $P(s)$ kann man die Pole des Prozesses $A(s)=0$ nach $P(s)A(s)+Q(s)B(s)=0$ "verschieben". Grenzen ergeben sich durch die Beschränkungen der Stellgrößen $|u(t) \le u_{max};\ |\dot{u}(t)| \le \dot{u}_{max}$.

c) Die Nullstellen des Prozesses $B(s)=0$ bleiben beim Führungsverhalten als Nullstellen erhalten.

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme VI

Gegeben:



mit $$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_P(s)$$

Frage: Welches Übertragungsverhalten muss ein Regler haben, damit bei gegebenem Regelkreis keine bleibenden Regelabweichungen entstehen?

Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden:
- Prozess $G_P(s)$ mit P- oder I-Verhalten
- Reaktion auf Eingangssprünge oder Ausregelung von Störungen $z(t)$ oder $z'(t)$

Als Anregung betrachten wir

$$w(t) = \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathcal{L}[w(t)] = W(s) = \frac{1}{s}$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme VII

a.) **Änderung der Führungsgröße:** $w(t) = \sigma(t)$ sowie $z(t) = z'(t) = 0$

- Wir erinnern uns :

$$E(s) = W(s) - G_0(s) \cdot E(s)$$

$$\rightarrow \quad E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot W(s) = R(s) \cdot W(s)$$

- Im Unendlichen verschwindet die Regeldifferenz $e(t)$, wenn

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} \left(s \cdot \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0} G_0(s) = \lim_{s\to 0} G_R(s) \cdot G_P(s) = \infty$$

- Dies kann nur erfüllt werden, wenn entweder $G_R(s)$ oder $G_P(s)$ einen Pol bei $s = 0$ hat → I-Anteil

- Merke: ein I-Anteil verhindert eine bleibende Regelabweichung!

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme VIII

RWTH AACHEN UNIVERSITY

b.) **Änderung einer Störgröße am Ausgang:** sei nun $z(t) \neq 0$ sowie $w(t) = z'(t) = 0$.

- Wegen $Y(s) = G_S(s) \cdot R(s) \cdot Z(s)$ und $G_S(s) = 1$ lautet die Störübertragungsfunktion

$$G_z(s) = R(s).$$

$$E(s) = \underbrace{W(s)}_{=0} - Y(s) = -Y(s) = -\underbrace{G_S(s)}_{=1} R(s) \cdot Z(s) = -R(s) \cdot Z(s)$$

$$\rightarrow \quad E(s) = -\frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot Z(s) = -R(s) \cdot Z(s)$$

- Auch in diesem Fall gilt also: sprungförmige Störsignale werden ausgeregelt, wenn

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{-1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s \to 0} G_0(s) = \lim_{s \to 0} G_R(s) \cdot G_P(s) = \infty$$

- I-Anteil in Prozess oder Regler!

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme IX

RWTH AACHEN UNIVERSITY

c.) **Änderung einer Störgröße am Eingang:** sei nun $z'(t) \neq 0$ sowie $w(t) = z(t) = 0$.

- Wegen $Y(s) = G_S(s) \cdot R(s) \cdot Z'(s)$ und $G_S(s) = G_P(s)$ lautet die Störübertragungsfunktion

$$G_z(s) = G_P(s) \cdot R(s).$$

$$E(s) = \underbrace{W(s)}_{=0} - Y(s) = -Y(s) = -G_P(s) \cdot R(s) \cdot Z'(s)$$

$$\rightarrow \quad E(s) = -\frac{G_P(s)}{1 + G_0(s)} \cdot Z'(s)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{-G_P(s)}{1 + G_R(s) G_P(s)} \cdot \frac{1}{s} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme X

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Folglich gilt: Falls

- die Regelstrecke P-Verhalten hat:

$$\lim_{s\to 0} G_P(s) = K_P \quad \Rightarrow \quad \lim_{s\to 0} G_R(s) = \infty,$$

  dann muss der Regler I-Verhalten haben.

- die Regelstrecke I-Verhalten hat:

$$G_P(s) = \frac{B(s)}{s \cdot A'(s)},$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} \left(s \cdot \frac{-G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} \cdot \frac{1}{s} \right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \left(\frac{-1}{\frac{1}{G_P(s)} + G_R(s)} \right) = \lim_{s\to 0} \left(\frac{-1}{\frac{sA'(s)}{B(s)} + G_R(s)} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

- Dies kann nur erreicht werden, wenn wiederum der Regler I-Verhalten hat

$$\Rightarrow \quad \lim_{s\to 0} G_R(s) = \infty.$$

6.4 Eigenschaften geregelter Systeme XI

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Reglerverhalten für:

Prozess	**Ausregelung eines Sprungs am Eingang** $(w(t) = \sigma(t))$	**Störung am Prozess-Ausgang**	**Störung am Prozess-Eingang**
P-Verhalten	Regler: I-Verhalten	Regler: I-Verhalten	Regler: I-Verhalten
I-Verhalten	Regler: P-Verhalten	Regler: P-Verhalten	Regler: I-Verhalten

Schlussfolgerung aus a.) – c.):

- Merke: Für alle Steuersignale $w(t)$ und Störsignale $z(t)$, $z'(t)$ ergibt sich keine bleibende Regeldifferenz, wenn der Regler I-Verhalten besitzt.

- Achtung: bei I-Strecken darf allerdings kein reiner I-Regler benutzt werden, sondern ein PI-Regler, sonst droht die Gefahr der Instabilität (siehe später).

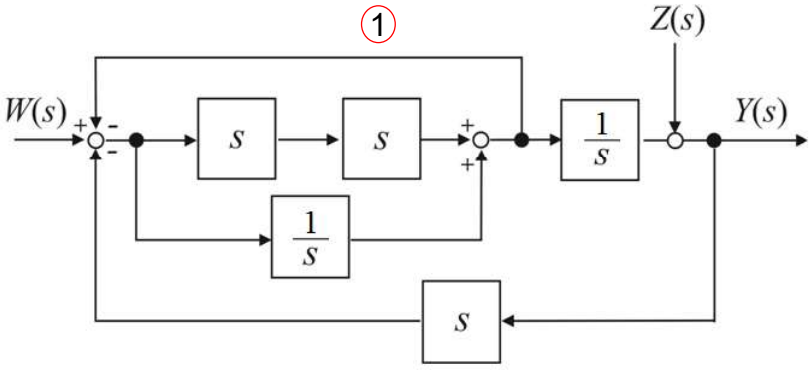
Gliederung

6.1 Wiederholung: Blockschaltbildumformung
6.2 Besondere Übertragungsglieder
6.3 Prinzip der Rückkopplung und der Regelung
6.4 Eigenschaften geregelter Systeme
6.5 Beispiel
6.6 Hausaufgaben

6.5 Beispiel: Blockschaltbildumformung für rückgekoppeltes System

Aufgabe:

- Bestimmen Sie die Führungs- und die Störübertragungsfunktion des gegebenen Blockschaltbildes



6.5 Beispiel: Blockschaltbildumformung für rückgekoppeltes System

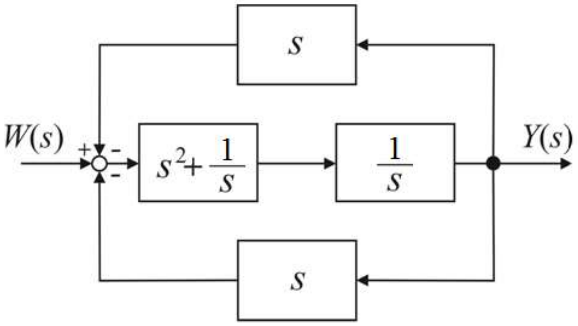
Lösungsweg 1:

- Schieben Sie Pfad (1) über den Integratorblock nach rechts

- Vernachlässigen Sie zunächst die Störung $Z(s)$
- Rückkopplung verdoppelt

$$G_0(s) = \left(s^2 + \frac{1}{s}\right) \cdot \frac{1}{s} \cdot 2s$$

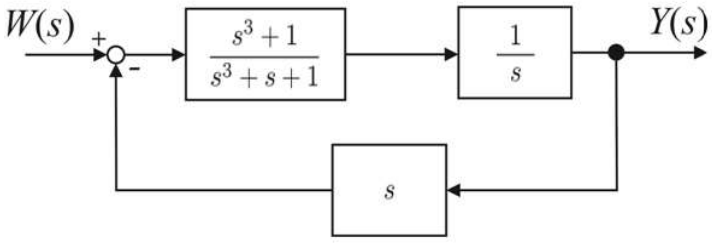
$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{s}\right) \cdot \frac{1}{s}}{1 + G_0(s)} = \frac{\frac{s^3+1}{s^2}}{1 + 2 \cdot \frac{s^3+1}{s}} = \frac{s^3 + 1}{2s^4 + s^2 + 2s}$$



6.5 Beispiel: Blockschaltbildumformung für rückgekoppeltes System

Lösungsweg 2:

- Umformung des „inneren“ Regelkreises



$$G_{innen}(s) = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{s}\right)}{1 + \left(s^2 + \frac{1}{s}\right)} = \frac{s^3 + 1}{s^3 + s + 1}$$

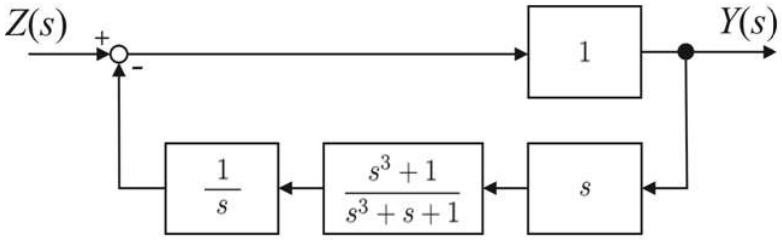
$$G_w(s) = \frac{\frac{s^3+1}{s^3+s+1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{s^3+1}{s^3+s+1} \cdot \frac{s}{s}} = \frac{s^3 + 1}{2s^4 \mid s^2 \mid 2s}$$

6.5 Beispiel: Blockschaltbildumformung für rückgekoppeltes System

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Störübertragungsfunktion:

- Sei $W(s) = 0$



$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s^3+1}{s^3+s+1} \cdot \frac{s}{s}} = \frac{s^3+s+1}{2s^3+s+2}$$

6.5 Beispiel: Blockschaltbildumformung für rückgekoppeltes System

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Frage:

- Hat das System eine bleibende Regelabweichung bei einem Sprung am Eingang?

Antwort:

- $W(s) = \frac{1}{s}$ und Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises:

$$G_0(s) = \frac{s^3+1}{s^3+s+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot R(s) \cdot W(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \left(\frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} \right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \left(s \cdot \frac{1}{1 + \frac{s^3+1}{s^3+s+1}} \cdot \frac{1}{s} \right) = \lim_{s\to 0} \left(\frac{s^3+s+1}{2s^3+s+2} \right) \neq 0$$

Fazit: Dieses System hat eine bleibende Regelabweichung

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

6.1 Wiederholung: Blockschaltbildumformung
6.2 Besondere Übertragungsglieder
6.3 Prinzip der Rückkopplung und der Regelung
6.4 Eigenschaften geregelter Systeme
6.5 Beispiel
6.6 Hausaufgaben

6.6 Zum Nachlesen

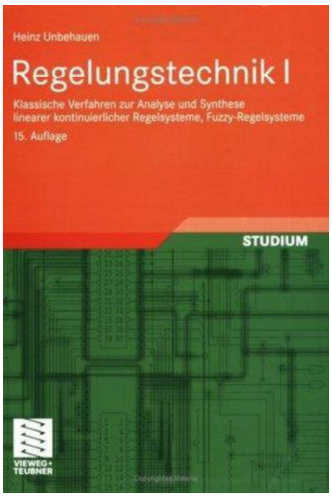
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hausaufgabe:

- Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …

<u>Zur Vertiefung:</u>

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008
  - darin Kap. 5



7. Frequenzgang und Bode-Diagramm

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

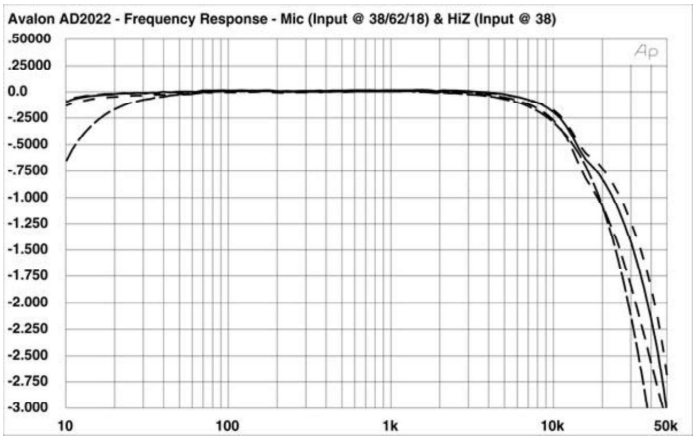
Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

7.1 Einführung
7.2 Frequenzgang und Ortskurve
7.3 Das Bode-Diagramm
7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm für Polynome erster Ordnung
7.5 Bode-Diagramm für Systeme höherer Ordnung
7.6 Hausaufgaben

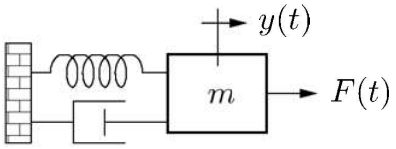


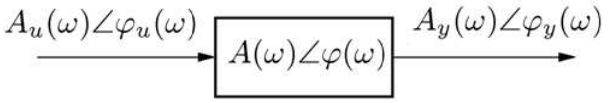
http://www.avalondesign.com/images/2022Fig-1.jpg

7.1 Einleitung

Wir wissen bereits: ein lineares System $G(s)$, das mit einem sinusförmigen Eingangssignal beaufschlagt wird, antwortet mit einem skalierten und phasenverschobenen Sinussignal

Beispiel: $u(t) = F(t) = A_u cos(\omega t + \varphi_u)$ sei die Kraft, die eine federnd aufgehängte Masse bewegt, $y(t) = A_y cos(\omega t + \varphi_y)$ sei die Position.

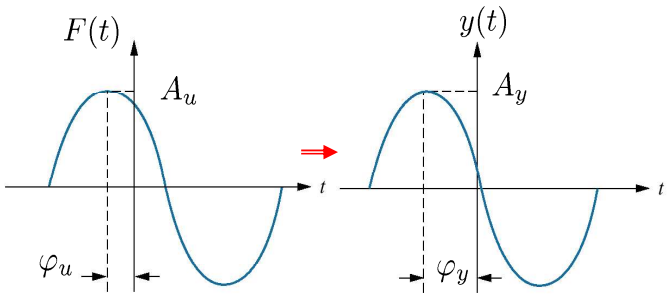




$$A_y(\omega)\angle\varphi_y(\omega) = A_u(\omega)A(\omega)\cdot\angle\left[\varphi_u(\omega)+\varphi(\omega)\right]$$

$$\text{mit } A(\omega) = \frac{A_y(\omega)}{A_u(\omega)}$$

$$\text{und } \varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_u(\omega)$$



7.1 Einleitung

Beachte: Bei der Analyse des Frequenzgangs betrachten wir nur den eingeschwungenen Zustand.

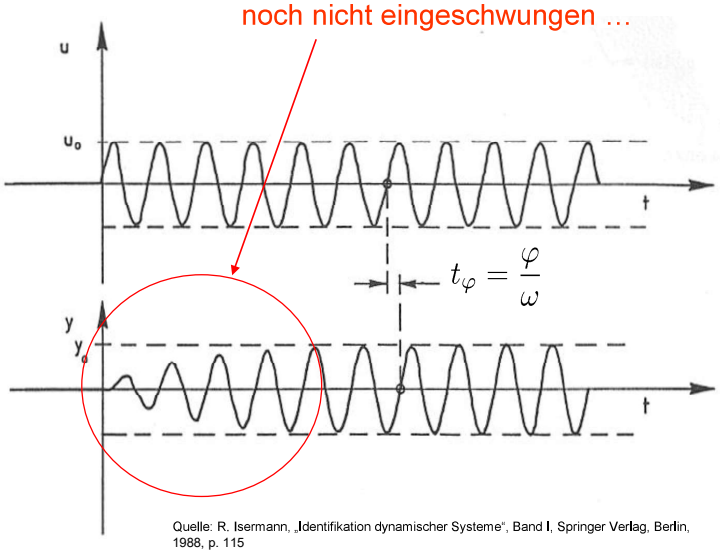
$$u(t) = u_0(\omega)\cdot sin(\omega t) \rightarrow$$
$$y(t) = y_0(\omega)\cdot sin(\omega t - \varphi)$$

Amplitudengang:

$$A(\omega) = |\, G(j\omega)\,| = \frac{|\, y_0(\omega)\,|}{|\, u_0(\omega)\,|}$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = -t_\varphi \cdot \omega$$



Quelle: R. Isermann, „Identifikation dynamischer Systeme", Band I, Springer Verlag, Berlin, 1988, p. 115

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

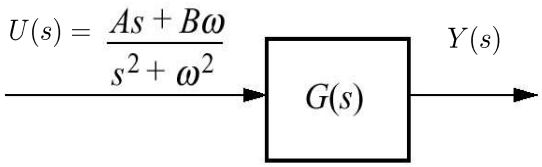
7.1 Einführung
7.2 Frequenzgang und Ortskurve
7.3 Das Bode-Diagramm
7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm für Polynome erster Ordnung
7.5 Bode-Diagramm für Systeme höherer Ordnung
7.6 Hausaufgaben

7.2 Der Frequenzgang

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition:

- Der Frequenzgang eines Systems $G(s)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Ausgang $Y(s)$ und den **harmonischen** Eingangssignalen $U(s)$



Mathematische Beschreibung:

- der „Frequenzgang“ des Systems ist definiert als

$$G(j\omega) = G(s)|_{s \to j\omega}$$

- Der Frequenzgang lässt sich in der *s*-Ebene als sog. „**Ortskurve**“ darstellen.
  → Komplexe Funktion des Parameters ω in der *s*-Ebene

7.2 Verwandtschaft zwischen Integraltransformationen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Zur Erinnerung:

- Die einseitige Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$ ist definiert als

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

  wobei $s = \sigma + j\omega$ eine beliebige **komplexe Zahl** und $f(t)$ eine beliebige Funktion von exponentieller Ordnung, d.h. $|f(t)| \leq Ce^{s_0 t}$ für $t > 0$ und $C > 0$, $s_0 > 0$. Weiterhin ist $f(t) = 0$ für $t < 0$.
- Zusätzlich ist

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

Zur Erinnerung: Die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(t)$ ist definiert als

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Beachte:

- die Fourier-Transformation ist definiert von - ∞ bis ∞ und wird durch $\sqrt{2\pi}$ skaliert.
- Der Frequenzgang entspricht damit der einseitigen Fourier-Transformation!

7.2 Beispiel: Ortskurve eines PT_1-Systems

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Aufgabe: Gegeben ist das System $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$

- Man bestimme analytische Ausdrücke für den Amplituden- und den Phasengang.
- Man skizziere den Frequenzgang in der komplexen s-Ebene.

Lösung:

- Frequenzgang: $s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{2 - j\omega}{\omega^2 + 4} = \frac{2}{\omega^2 + 4} + j\frac{-\omega}{\omega^2 + 4}$$

mit

$$|G(j\omega)| = A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

und

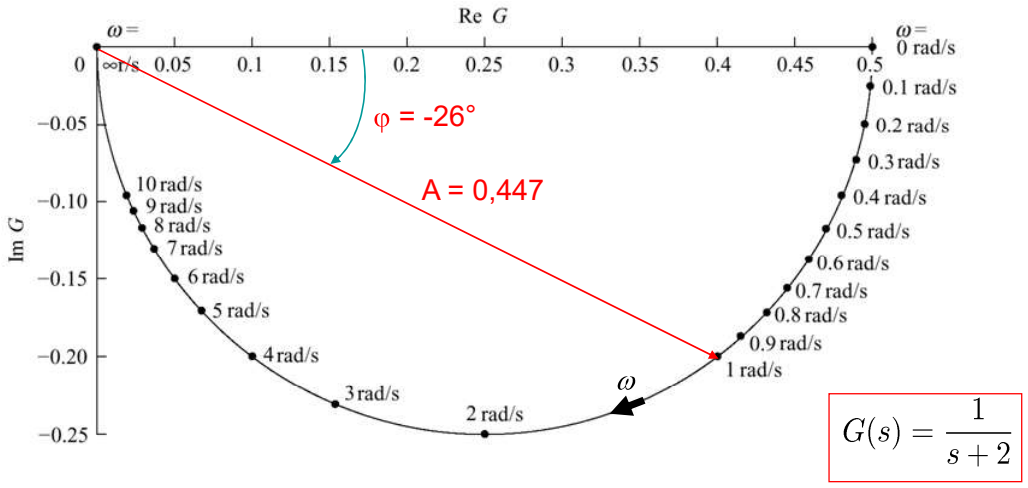
$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\Im(G(j\omega))}{\Re(G(j\omega))} = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{2}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- Wie erwähnt lässt sich dieser Frequenzgang als Funktion des Parameters ω ($0 \leq \omega < \infty$) in der s-Ebene darstellen:
- Diese komplexe Funktion nennt man die „***Ortskurve***“.

7.2 Beispiel: Ortskurve eines PT_1-Systems

Bestimmung der Ortskurve durch sukzessive Veränderung der Kreisfrequenz

- Beispielsweise gilt für $\omega = 1$ rad/s → $A(\omega) = 1/\sqrt{5} = 0{,}447$ und $\varphi = -26°$

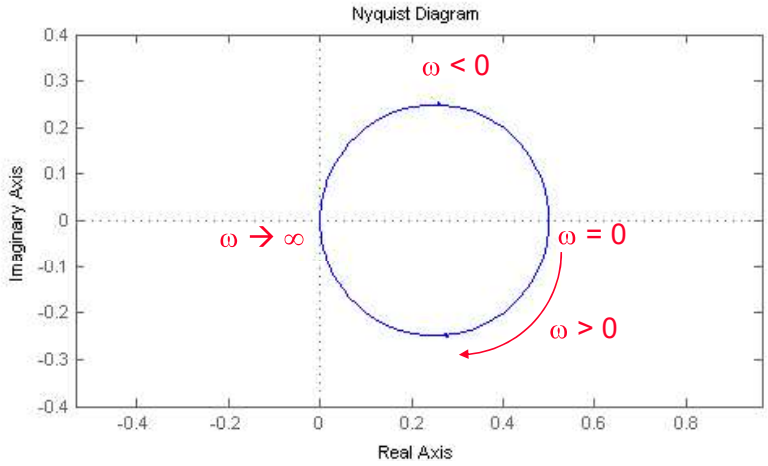


$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

7.2 Überprüfung mit MATLAB

Auf der Kommandoebene geben Sie bitte folgende Befehle ein.

```
>> num = [1];
>> den = [1 2];
>> sys = tf(num,den)

      Transfer function:
           1
          -----
          s + 2

>> nyquist(sys)
```



oder Sie benutzen den m-File Ortskurve_Example1.m

- Beachte: Im Englischen heißt die Ortskurve „*Nyquist-Diagram*“.

7.2 Ortskurve eines PT_2-Systems

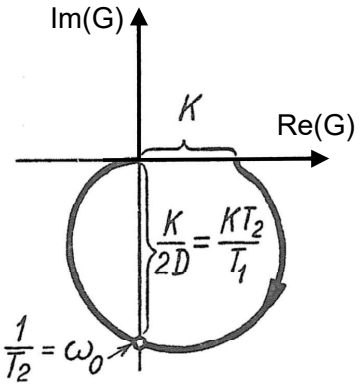
Gegeben ist nun ein PT_2-System:

$$G(s) = \frac{K}{1 + T_1 \cdot s + T_2^2 \cdot s^2} = \frac{K}{1 + \frac{2D}{\omega_0} \cdot s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2D\omega_0 \cdot s + s^2}$$

im Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + T_1 \cdot (j\omega) + T_2^2 \cdot (j\omega)^2} = \frac{K}{1 - T_2^2 \cdot (\omega)^2 + j \cdot T_1 \cdot (\omega)}$$
$$= \frac{K}{1 - \frac{1}{\omega_0^2}(\omega)^2 + j \cdot \frac{2D}{\omega_0} \cdot (\omega)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 - (\omega)^2 + j \cdot 2D\omega_0 \cdot (\omega)}$$

Als Hausaufgabe: komplex konjugiert erweitern …



Quelle: W. Oppelt, „Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge", Verlag Chemie, Weinheim, 1964, p. 71

Besondere Punkte:

- $\omega = 0 \quad \rightarrow \quad G(j\omega)\,|_{\omega=0} \quad = K$

Durchtritt durch die imaginäre Achse:

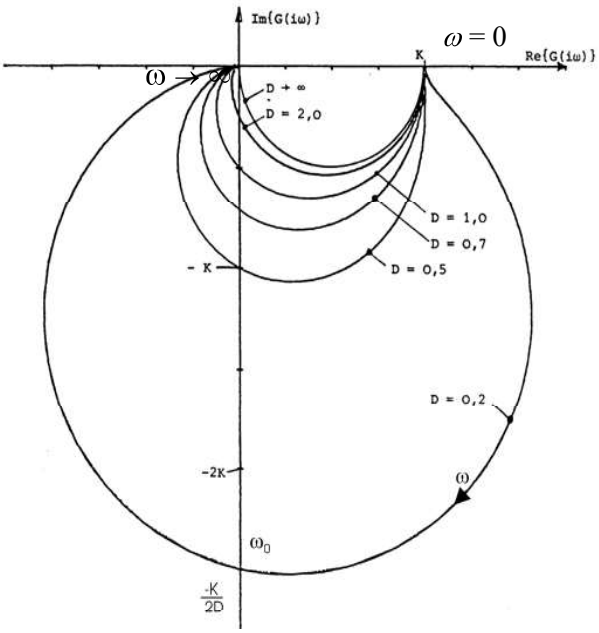
- $\omega = \omega_0 \quad \rightarrow \quad G(j\omega)\,|_{\omega=\omega_0} \quad = -j \cdot K/2D$

7.2 Einfluss des Dämpfungsgrades D

Bei Systemen zweiter Ordnung determiniert der Verstärkungsfaktor K den Schnittpunkt mit der reellen Achse.

Die Ortskurven schneiden die imaginäre Achse bei $\omega = \omega_0$, dort ist der Betrag des Frequenzgangs $K/2D$

Beachte:
je kleiner der Dämpfungsgrad D, desto weiter sind die Ortskurven „ausgebeult" …



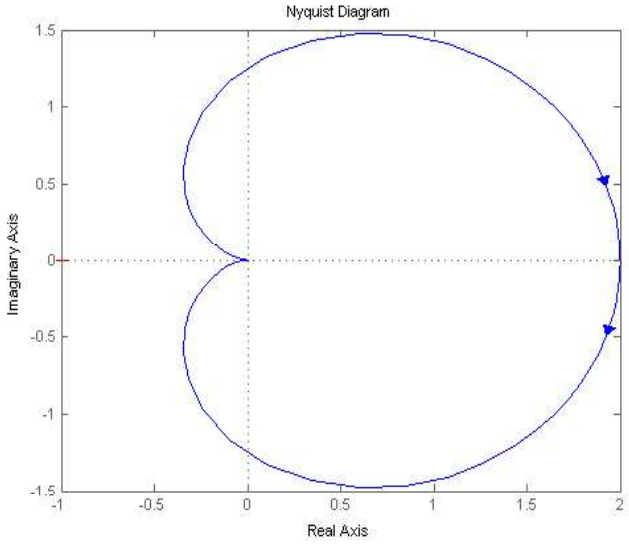
Quelle: R. Isermann, „Regelungstechnik 1", Skriptum zur Vorlesung, TU Darmstadt, 2001

7.2 Überprüfung mit MATLAB

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Auf der Kommandoebene geben Sie bitte folgende Befehle ein

```
>> K = 2;
>> omega0 = 1;
>> D = 0.8;
>> num = [K*omega0^2];
>> den = [1 2*D*omega0 omega0^2];
>> sys = tf(num,den)

        Transfer function:
                2
        ---------------
        s^2 + 1.6 s + 1

>> nyquist(sys)
```



oder Sie benutzen den m-File Ortskurve_Example2.m

- Tip: Verändern Sie einzelne Parameter.

7.2 Ortskurve eines PT_3-Systems

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben ist nun ein PT_3-System

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1^* s)\cdot(1+T_2^* s)\cdot(1+T_3^* s)} = \frac{K}{(1+T_1 s+T_2^2 s^2+T_3^3 s^3)}$$

im Frequenzgang:

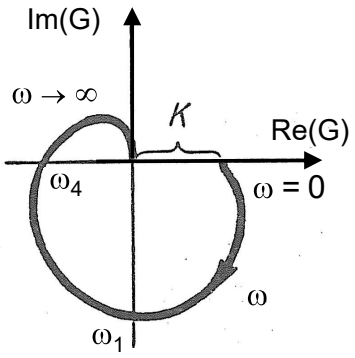
$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+T_1(j\omega)+T_2^2(j\omega)^2+T_3^3(j\omega)^3)} = \frac{K}{(1-T_2^2\omega^2)+j\cdot(T_1\omega-T_3^3\omega^3)}$$

- Schnittpunkt mit der imaginären Achse

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{T_2^2}} = \pm\frac{1}{T_2}$$

- Schnittpunkt mit der reellen Achse

$$\omega_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{T_1}{T_3^3}}$$



Quelle: W. Oppelt, „Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge", Verlag Chemie, Weinheim, 1964, p. 71

7.2 Ortskurve eines PT$_n$-Systems

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben ist ein PT$_n$-System

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)\cdot(1+T_2 s)\cdot\ldots\cdot(1+T_n s)} = G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot\ldots\cdot G_n(s)$$

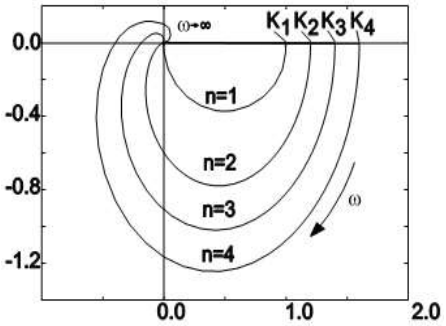
Frequenzgang:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G_1(j\omega)|\cdot|G_2(j\omega)|\cdot\ldots\cdot|G_n(j\omega)|\cdot e^{\,j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\ldots+\varphi_n(\omega))} \\ &= |G(j\omega)|\cdot e^{\,j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

Beobachtung:

- Die Ortskurve eines PT$_n$-Glieds durchläuft n Quadranten im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ).
- Da die einzelnen PT$_1$-Glieder eine maximale Phasenverzögerung von $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ besitzen, gilt für die Phasenverzögerung beim PT$_n$-Glied

$$\varphi_{max} = -n\cdot\frac{\pi}{2}$$



7.2 Ortskurve des D- und des I-Gliedes

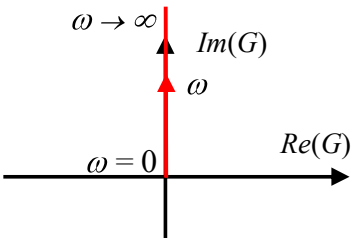
RWTH AACHEN UNIVERSITY

D-Glied

- Die Ortskurve des D-Glieds verläuft auf der imaginären Achse

$$G(s) = K_D\cdot s = T_D\cdot s$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = j\cdot K_D\omega$$

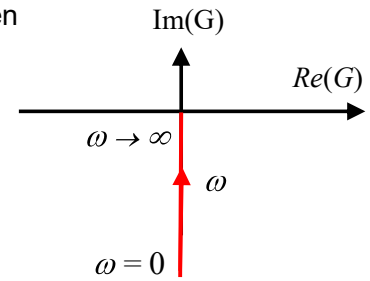


I-Glied

- Die Ortskurve des I-Glieds verläuft auf der imaginären Achse

$$G(s) = K_I\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{T_I\cdot s}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = K_I\cdot\frac{1}{j\omega} = -j\frac{K_I}{\omega} = -j\frac{1}{T_I\cdot\omega}$$



7.2 Ortskurve des IT_1-Gliedes

RWTH AACHEN UNIVERSITY

IT_1 - Glied

- Merke: die Ortskurve des IT_1-Glieds verläuft **nicht** auf der imaginären Achse.

$$G(s) = K_I \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+T_1 s} = \frac{1}{T_I \cdot s} \cdot \frac{1}{1+T_1 s}$$

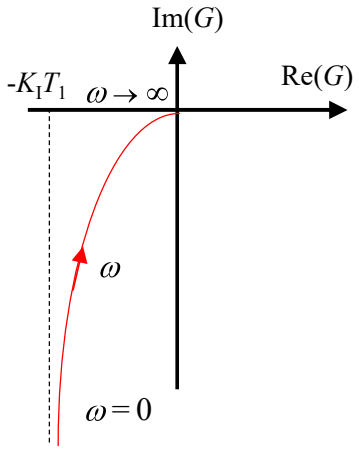
$$\Rightarrow G(j\omega) = K_I \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{1+T_1 j\omega}$$

$$= -K_I \cdot \frac{1}{T_1\omega^2 - j\omega}$$

$$= -K_I \cdot \frac{T_1\omega^2 + j\omega}{T_1^2\omega^4 + \omega^2}$$

$$= -\frac{K_I T_1}{T_1^2\omega^2 + 1} - j\frac{K_I}{T_1^2\omega^3 + \omega}$$

$$\Rightarrow G(j\omega)|_{\omega\to 0} = -K_I T_1 - j\infty$$

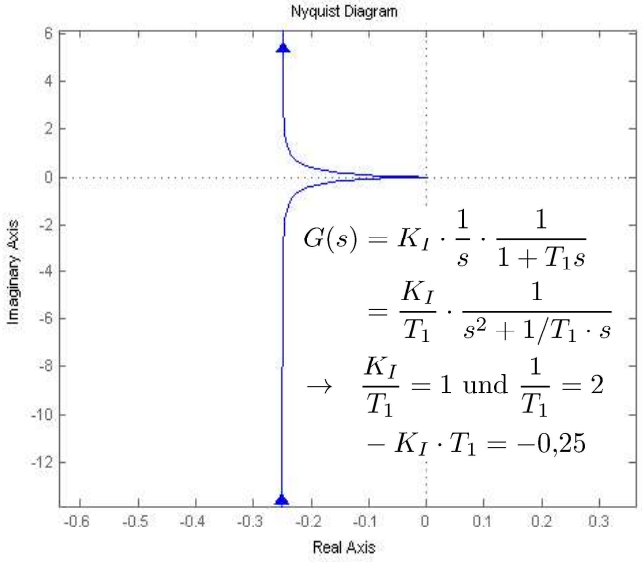


7.2 Überprüfung mit MATLAB

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Auf der Kommandoebene geben Sie bitte folgende Befehle ein

```
>> num = [1];
>> den = [1 2 0];
>> sys = tf(num,den)

 Transfer function:
      1
   ---------
   s^2 + 2 s

>> nyquist(sys)
```



$$G(s) = K_I \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+T_1 s}$$

$$= \frac{K_I}{T_1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1/T_1 \cdot s}$$

$$\rightarrow \quad \frac{K_I}{T_1} = 1 \text{ und } \frac{1}{T_1} = 2$$

$$-K_I \cdot T_1 = -0{,}25$$

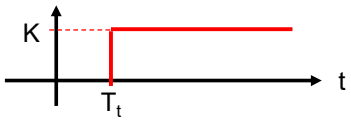
Oder Sie benutzen den m-File Ortskurve_Example3.m.

- Tipp: Verändern Sie einzelne Parameter

7.2 Ortskurve des Totzeitglieds

Das **Totzeitglied** bewirkt eine Verschiebung des Ausgangssignals bezüglich des Eingangssignals um die Totzeit T_t

$$y(t) = K \cdot u(t - T_t), \quad u(t) = 0 \quad \forall \quad t < 0$$



Die Laplace-Transformation führt auf $Y(s) = K \cdot e^{-T_t \cdot s} \cdot U(s)$ und somit zur Übertragungsfunktion eines T_t - Glieds:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \cdot e^{-T_t \cdot s}$$

Merke: ein Totzeitglied besitzt *keine Pole* und *keine Nullstellen* im Endlichen.

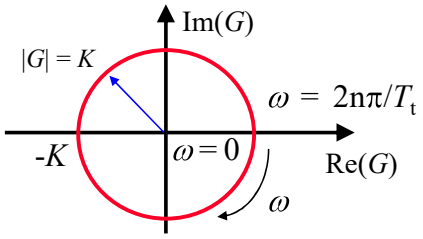
$$G(j\omega) = K \cdot e^{-jT_t\omega} = K \cdot (cos(\omega T_t) - jsin(\omega T_t))$$

Amplituden- und Phasengang:

$$\Rightarrow \quad |G(j\omega)| = K; \; \varphi(\omega) = -\omega T_t$$

$$\omega = 0: \quad G(j0) = K; \; \varphi(0) = 0$$

$$\omega = n\frac{\pi}{T_t} : G(jn\frac{\pi}{T_t}) = -K, \; \varphi(n\frac{\pi}{T_t}) = -n\pi$$



7.2 Ortskurve des PT_1T_t - Glieds

$$G(s) = K \cdot e^{-T_t \cdot s} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = K \cdot \frac{cos(\omega T_t) - jsin(\omega T_t)}{1 + j\omega T_1}$$

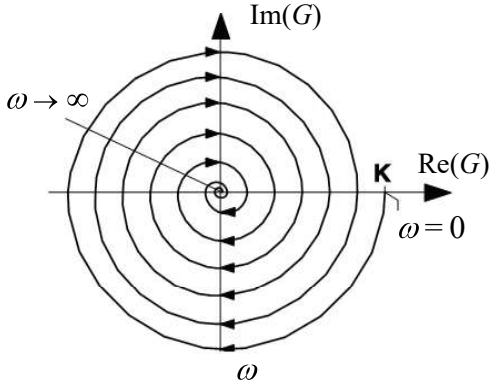
$$= K \cdot \frac{(cos(\omega T_t) - \omega T_1 sin(\omega T_t)) - j(\omega T_1 cos(\omega T_t) + sin(\omega T_t))}{1 + T_1^2\omega^2}$$

Amplitudengang (wie PT_1 - Glied):

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}$$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = -\left(\omega T_t + tan^{-1}(\omega T_1)\right)$$



- Merke: Die Ortskurve des PT_1T_t - Glieds durchläuft unendlich viele Quadranten.

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

7.1 Einführung
7.2 Frequenzgang und Ortskurve
7.3 Das Bode-Diagramm
7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm für Polynome erster Ordnung
7.5 Bode-Diagramm für Systeme höherer Ordnung
7.6 Hausaufgaben

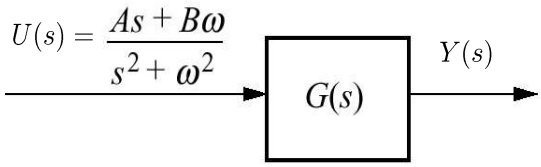
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/b/b9/Hbode.png

Hendrik Wade Bode
(* 24. Dezember 1905 in Madison, Wisconsin;
† 21. Juni 1982, in Cambridge (Massachusetts))
war ein US-amerikanischer Elektrotechniker.

7.3 Prinzip des Bode-Diagrams

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Zur Erinnerung: Der Frequenzgang beschreibt den Zusammenhang zwischen Ausgang $Y(s)$ und harmonischen Eingangssignalen $U(s)$



- Wie jede andere komplexe Zahl lässt sich der Frequenzgang mit Hilfe von Amplitude und Phase beschreiben:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \angle G(j\omega)}.$$

Amplitudengang: $A(\omega) = |G(j\omega)|$

Phasengang: $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$

7.3 Bode-Diagramm

Definition des Bode-Diagramms:

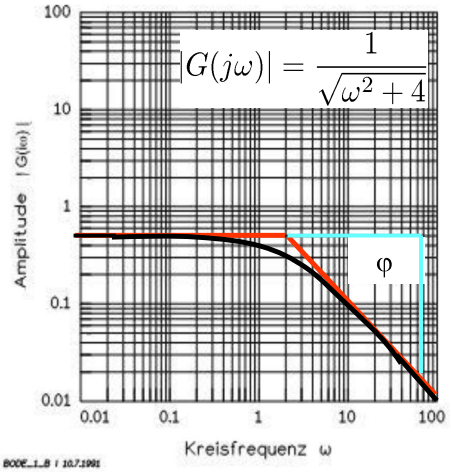
Darstellung des Amplitudengangs $|G(j\omega)|$ auf doppelt-logarithmischen Papier

Merke: der zeichnerische *Knickwinkel* ist $\varphi = -45°$, wenn die Dekaden-Skalierung der beiden Achsen gleich ist

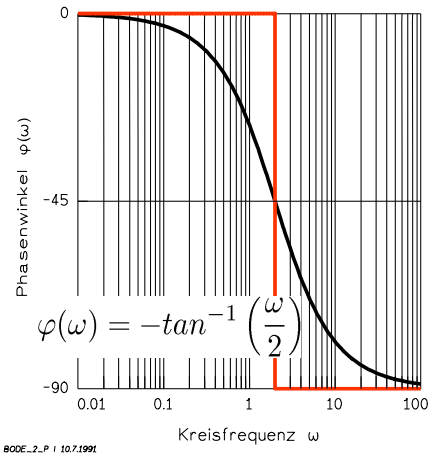
Darstellung der Phase $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ in einfach-logarithmischer Darstellung

Beispiel: PT_1 - Glied

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$$



und



7.3 Beispiel eines PT_1-Gliedes

System $G(s) = \frac{1}{s+2}$

Trick:

Amplitudengang als Logarithmus darstellen (doppelt-logarithmisch → einfach-logarithmisch)

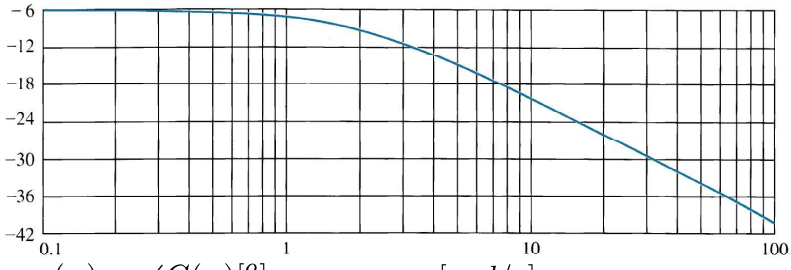
$$20\ log(|G(j\omega)|)$$

$$= 20\ log\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}}\right)$$

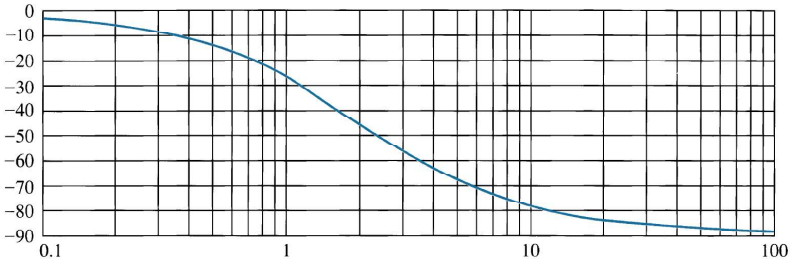
Phasengang (einfach logarithmisch)

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$20\ log(|G(j\omega)|)$

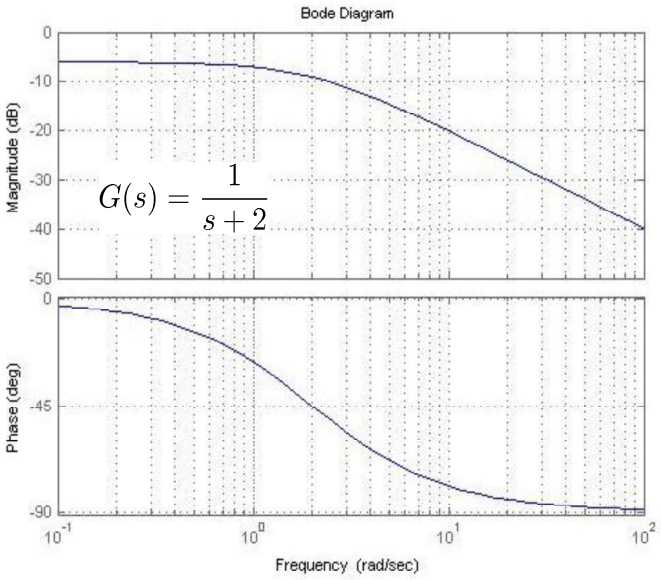


$\varphi(\omega) = \angle G(\omega)[^o]$ $\omega[rad/s]$



7.3 Überprüfung mit Matlab

```
>> sys = tf(1,[1 2]);
>> bode(sys)
>> grid
```



Definition des Dezibel (dB)

$$20\ log|G(j\omega)|\ [dB]$$

oder benutzen Sie den m-File Bode_Example1.m

Gliederung

7.1 Einführung
7.2 Frequenzgang und Ortskurve
7.3 Das Bode-Diagramm
7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm für Polynome erster Ordnung
7.5 Bode-Diagramm für Systeme höherer Ordnung
7.6 Hausaufgaben

7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm

Wie schon beschrieben, nennt man den logarithmischen Amplitudengang und den Phasengang als Funktion von $\log\,\omega$ zusammen das **Bode-Diagramm**.

- Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{s^l} \cdot \frac{(s-s_{N,1})(s-s_{N,2})...(s-s_{N,m})}{(s-s_{P,1})(s-s_{P,2})...(s-s_{P,n})}$$

- Der Amplitudengang ist das Produkt der Amplitudengänge der einzelnen Terme

$$|G(j\omega)| = \frac{K|(s-s_{N,1})||(s-s_{N,2})|...|(s-s_{N,m})|}{|s^l||(s-s_{P,1})||(s-s_{P,2})|...|(s-s_{P,n})|}\Bigg|_{s\to j\omega}$$

- Konversion in Dezibel (dB) ergibt

$$\begin{aligned}20\log|G(j\omega)| = {} & 20\log K + 20\log|(s-s_{N,1})| + ... + 20\log|(s-s_{N,m})| \\ & -20\log|s^l| - 20\log|(s-s_{P,1})| - ... - 20\log|(s-s_{P,n})|\Big|_{s\to j\omega}\end{aligned}$$

7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm – das PD-Glied

Gegeben sei $G(s) = s + a$

$$\rightarrow\ G(j\omega) = (j\omega + a) = a\left(j\frac{\omega}{a} + 1\right) \quad \text{PD-Glied ...}$$

- Für kleine Frequenzen
  - Asymptote für kleine Frequenzen

$$20\log|G(j\omega)|_{\omega\to 0} = 20\log(M) = 20\log(a) = const.$$

- Für hohe Frequenzen
  - Asymptote für hohe Frequenzen

$$G(j\omega)|_{\omega>>a} \approx a\left(j\frac{\omega}{a}\right) = a\left(\frac{\omega}{a}\right)\angle 90^\circ = \omega\angle 90^\circ$$

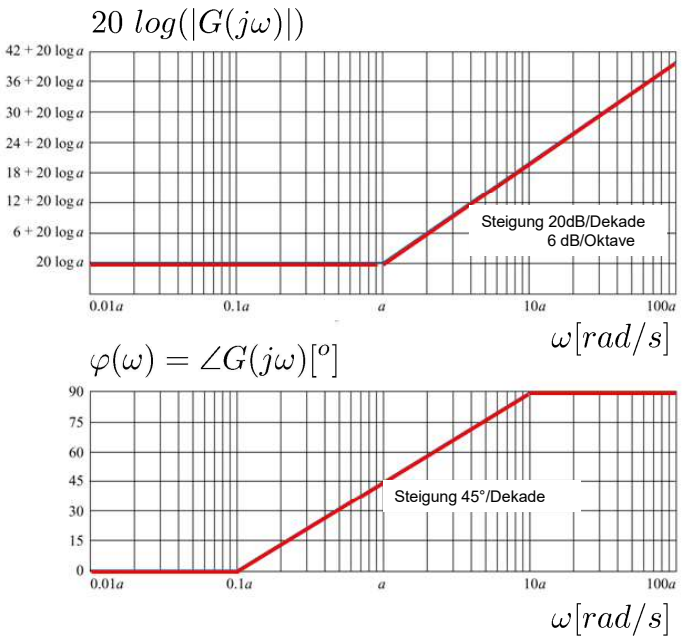
$$20\log|G(j\omega)|_{\omega\to\infty} = 20\log(\omega)$$

- Wir nennen $\omega = a$ die **Eckfrequenz** ω_E (oft auch „**Knickfrequenz**“) und stellen fest, dass sich die beiden Asymptoten bei $\omega = \omega_E = a$ schneiden.
  → der Asymptotenverlauf „*hat dort einen Knick*“.
- Wenn wir $y = 20\,\log(M)$ und $x = \log(\omega)$ setzen, dann führt die Darstellung von y über x jenseits der Eckfrequenz zu Geraden mit einer Steigung von 20 dB/Dekade.
  - **Alternativ:** die Verdopplung der Kreisfrequenz (Oktave) führt zu einem Anstieg von 6 dB.

7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm – das PD-Glied II

Bezüglich des Phasendiagramms erkennen wir, dass bei $\omega_E = a$ die Phase φ = + 45° ist

- Wir beginnen eine Dekade unterhalb der Eckfrequenz ($\omega = 0.1\ a$) und zeichnen die Asymptote mit einer Steigung von 45°/Dekade.
- Die Asymptote erreicht 90° bei $\omega = 10\ a$ (eine Dekade oberhalb der Eckfrequenz).
- Außerhalb dieser beiden Dekaden um $\omega_E = a$ verlaufen die Asymptoten des Phasengangs horizontal



7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm – das PD-Glied III

Gegeben sei weiterhin $G(s) = s + a$

$$G(j\omega) = (j\omega + a) = a\left(j\frac{\omega}{a} + 1\right)$$

$$\rightarrow \quad |G^*(j\omega^*)| = \frac{G(j\omega^*)}{a} = |(j\omega^* + 1)|$$

Skalierung des Betrags (ausklammern von a und dann teilen durch a) und der Frequenz (teilen durch a).

- Um die originalen Beträge zu bekommen, muss mit a multipliziert werden …

ω/a	$20\ log(\lvert G(j\omega/a)\rvert/a)$		$\varphi(\omega/a)$	
(rad/s)	Asymptote [dB]	Original [dB]	Asymptote [°]	Original [°]
0.01	0	0.00	0.00	0.57
0.02	0	0.00	0.00	1.15
0.04	0	0.01	0.00	2.29
0.06	0	0.02	0.00	3.43
0.08	0	0.03	0.00	4.57
0.1	0	0.04	0.00	5.71
0.2	0	0.17	13.55	11.31
0.4	0	0.64	27.09	21.80
0.6	0	1.34	35.02	30.96
0.8	0	2.15	40.64	38.66
1	0	3.01	45.00	45.00
2	6	6.99	58.55	63.43
4	12	12.30	72.09	75.96
6	15.56	15.68	80.02	80.54
8	18	18.13	85.64	82.87
10	20	20.04	90.00	84.29
20	26.02	26.03	90.00	87.14
40	32.04	32.04	90.00	88.57
60	35.56	35.56	90.00	89.05
80	38.06	38.06	90.00	89.28
100	40	40.00	90.00	89.43

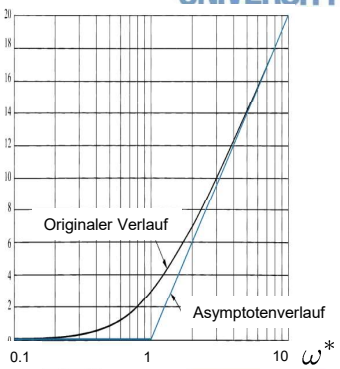
7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm – das PD-Glied IV

RWTH AACHEN UNIVERSITY

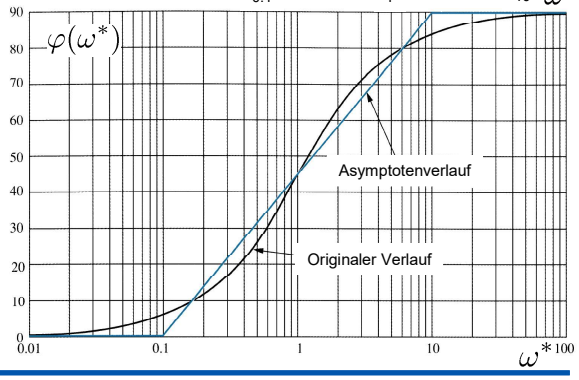
Skalierter Amplitudengang inkl. zugehörigem Asymptotenverlauf für $G(s) = s + a$

- Asymptotenverlauf beginnt nun bei 0 dB.
- Bei der Eckfrequenz ω/a = 1 beträgt die Abweichung zwischen originalem Amplitudengang und Asymptotenverlauf 3 dB.
- Mit ω ansteigende Asymptote → **Hochpass-Verhalten**.

$20\ log(|G^*(j\omega^*)|)$



Phasengang für normierte Frequenz



7.4 Asymptoten anderer Systeme: das D-Glied

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei

$$G(s) = s$$
$$\rightarrow\ G(j\omega) = j\omega$$

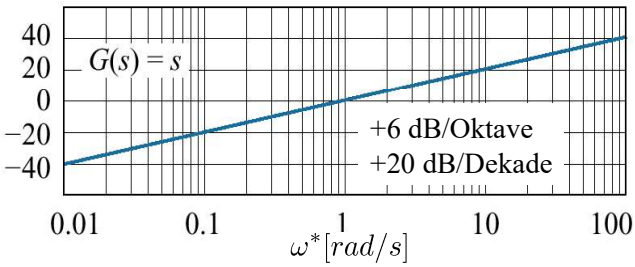
Wir erinnern uns: s bedeutet d/dt
→ D-Glied …

Frage: Wie sehen die Asymptoten aus?

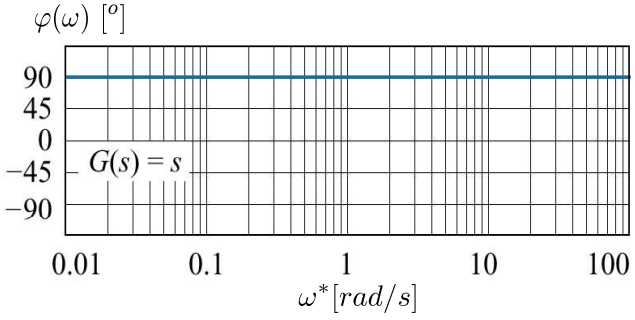
Antwort:

- Diese Übertragungsfunktion hat eine mit ω ansteigende Asymptote → auch ein Hochpass-Verhalten.
- Sie hat eine Amplitude von 1 (= 0 dB) bei ω = 1 und eine konstante Phase von + 90°.

$20\ log(|G^*(j\omega^*)|)\ [dB]$



$\varphi(\omega)\ [^o]$



7.4 Asymptoten anderer Systeme: das I-Glied

Gegeben sei

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

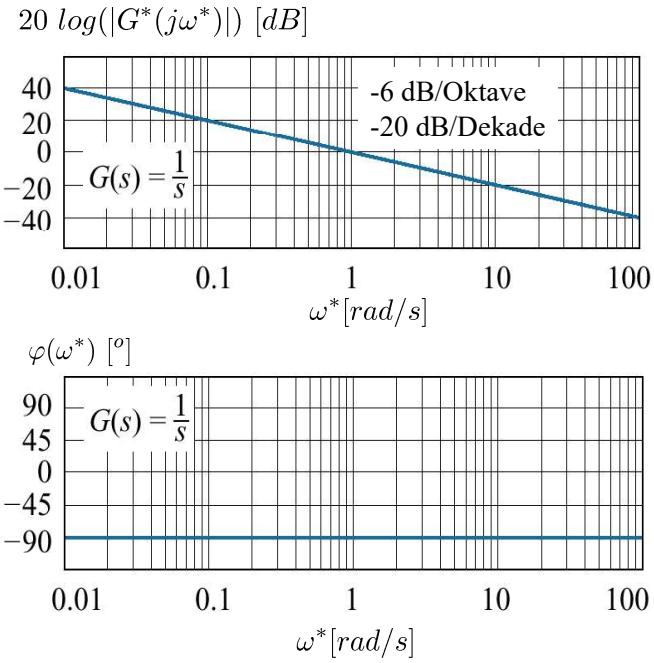
$$\rightarrow \; G(j\omega) = -j\frac{1}{\omega}$$

Wir erinnern uns: $1/s$ bedeutet Integration → I-Glied …

Frage: Wie sehen hier die Asymptoten aus?

Antwort:

- Diese Übertragungsfunktion hat eine mit ω abfallende Asymptote → Tiefpass-Verhalten.
- Sie hat eine Amplitude von 1 (= 0 dB) bei ω = 1 und eine konstante Phase von - 90°.



7.4 Asymptoten anderer Systeme: das PD-Glied

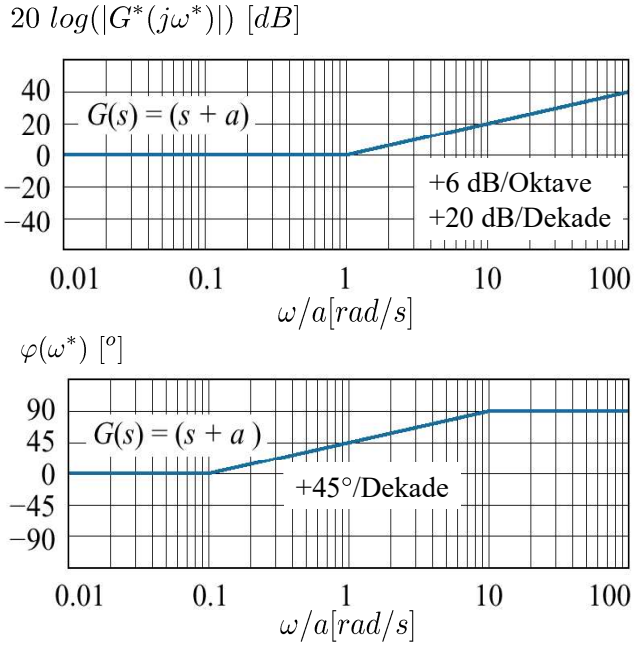
Wiederholung: gegeben sei

$$G(s) = s + a$$

Frage: wie sehen hier die Asymptoten aus?

Antwort:

- Dieser Frequenzgang hat eine Asymptote, die mit der Frequenz ω_E steigt
- Die Eckfrequenz liegt bei $\omega_E = a$ bzw. $\omega^* = 1$.
- Die Phase verläuft von 0 nach 90° und beträgt + 45° bei $\omega_E = a$.



7.4 Asymptoten anderer Systeme: das PT_1-Glied

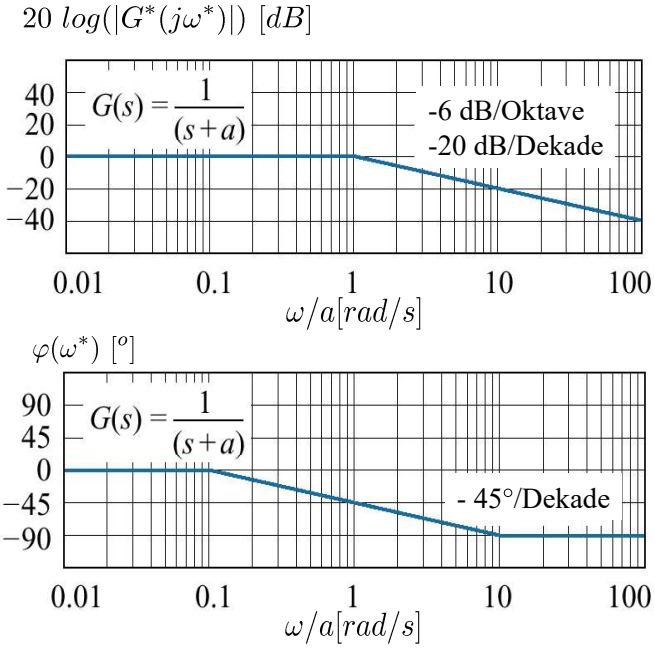
Wiederholung: gegeben sei

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

Frage: wie sehen hier die Asymptoten aus?

Antwort:

- Dieser Frequenzgang hat eine Asymptote, die mit der Frequenz abnimmt
- Die Eckfrequenz liegt bei $\omega_E = a$ bzw. $\omega^* = 1$.
- Die Phase verläuft von 0 nach - 90° und beträgt - 45° bei $\omega_E = a$.



7.4 Zusammenfassung: Übertragungsfunktionen 1. Ordnung

Wenn eine Übertragungsfunktion **Pole** $1/(s + a)$ enthält:

- Jeder Pol „biegt“ den Amplitudengang in Uhrzeigerrichtung und trägt ab der jeweiligen Eckfrequenz ω_E um –20 dB/Dekade zum gesamten Amplitudengang bei.
- Oberhalb der Eckfrequenz trägt ein Pol – 90° zum gesamten Phasengang bei.
- Der Startpunkt auf der Ordinate wird bestimmt durch Grenzübergang lim $\omega \to 0$.

Wenn eine Übertragungsfunktion **Nullstellen** $(s + a)$ enthält:

- Jede Nullstelle „biegt“ den Amplitudengang entgegen der Uhrzeigerrichtung und trägt ab der jeweiligen Eckfrequenz ω_E +20 dB/Dekade zum gesamten Amplitudengang bei.
- Eine Dekade oberhalb der Eckfrequenz trägt eine Nullstelle + 90° zum gesamten Phasengang bei. Achtung: Was passiert bei Nullstellen in der RH? -> Übung!
- Der Startpunkt auf der Ordinate wird bestimmt durch Grenzübergang lim $\omega \to 0$.

Spezialfälle: Integratoren $(1/s)$ und **Differentiatoren** (s)

- Differentiatoren (s) und Integratoren $(1/s)$ haben keine Eckfrequenz ω_E
- Sie tragen mit ± 20 dB/Dekade zum Amplitudengang und mit ± 90° zum Phasengang bei.
- Der Startpunkt kann **nicht** auf der Ordinate bestimmt werden, sondern z.B. bei $\omega = 1$.

Gliederung

7.1 Einführung
7.2 Frequenzgang und Ortskurve
7.3 Das Bode-Diagramm
7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm für Polynome erster Ordnung
7.5 Bode-Diagramm für Systeme höherer Ordnung
7.6 Hausaufgaben

7.5 Bode-Diagramm bei System höherer Ordnung

Aufgabe:

- Gegeben ist das System

$$G(s) = K \cdot \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{3}{2}K\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

- Skizzieren Sie das Bode-Diagramm (Asymptotenverlauf).

Lösung:

- Wir konstatieren: das System hat PIDT$_2$ - Verhalten
- Wir beachten die Eckfrequenzen bei ω = 1, 2 und 3 rad/s sowie den I - Anteil.
- Wähle ω = 0,1 rad/s und ω = 100 rad/s als zu betrachtenden Frequenzbereich.
- Wir nutzen ω = 0,1 rad/s, um den Offset durch den Integrator zu bestimmen (Ordinatenabschnitt)

$$G(j\omega)|_{\omega=0,1} \approx \frac{\frac{3}{2} \cdot K \cdot (1)}{j0,1 \cdot (1) \cdot (1)} = -j15K$$

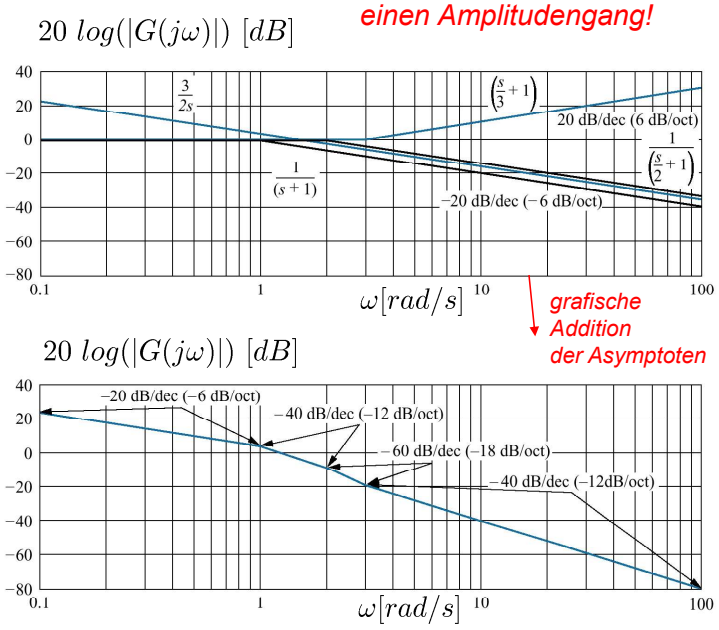
- Wähle zur Normalisierung K = 1. In diesem Fall beginnt der Amplitudengang für ω = 0,1 rad/s mit einer Amplitude von 20 log 15 = 23,52 dB, und nimmt dann mit -20 dB/Dekade ab.

7.5 Bode-Diagramm bei System höherer Ordnung II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

- Frequenz-Normierung → alle Asymptoten der Vorhalte- und Verzögerungsglieder fangen bei 0 dB an
- bei ω = 1 rad/s knickt der Asymptotenverlauf um weitere - 20 dB/Dekade ab
- bei ω = 2 rad/s knickt der Asymptotenverlauf nochmals um - 20 dB/Dekade ab
- ab ω = 3 rad/s biegt sich der Asymptotenverlauf um + 20 dB/Dekade nach oben (jetzt in Summe Abfall noch – 40 dB/Dekade)

Achtung: wir sehen 2 x einen Amplitudengang!



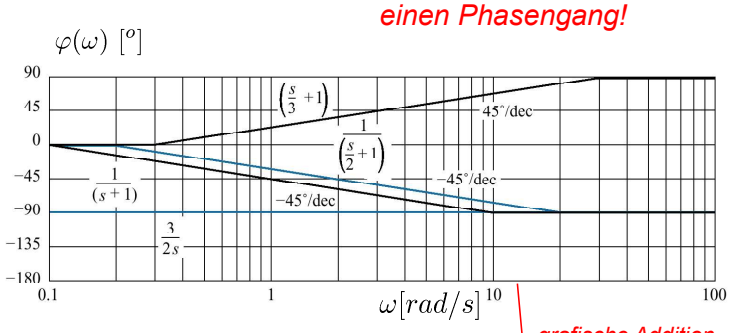
grafische Addition der Asymptoten

7.5 Bode-Diagramm bei System höherer Ordnung III

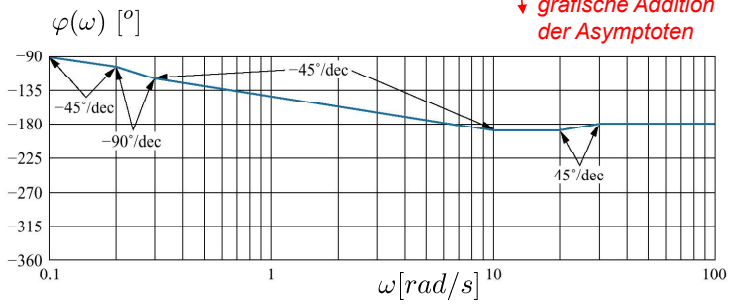
RWTH AACHEN UNIVERSITY

- Der Asymptotenverlauf beginnt bei ω = 0,1 rad/s mit φ = - 90°
- Der Asymptotenverlauf verläuft ab da mit - 45°/ Dekade von ω = 0.1 bis ω = 10 (durch den Pol bei 1/(s+1), wodurch bei der Eckfrequenz ω = 1 weitere – 90° dazukommen)
- Bei ω = 2 rad/s kommen weitere – 90° asymptotisches Verhalten zum Phasenverlauf dazu
- Bei ω = 3 rad/s kommen + 90° asymptotisches Verhalten zum Phasen-verlauf dazu …

Achtung: wir sehen 2 x einen Phasengang!



grafische Addition der Asymptoten

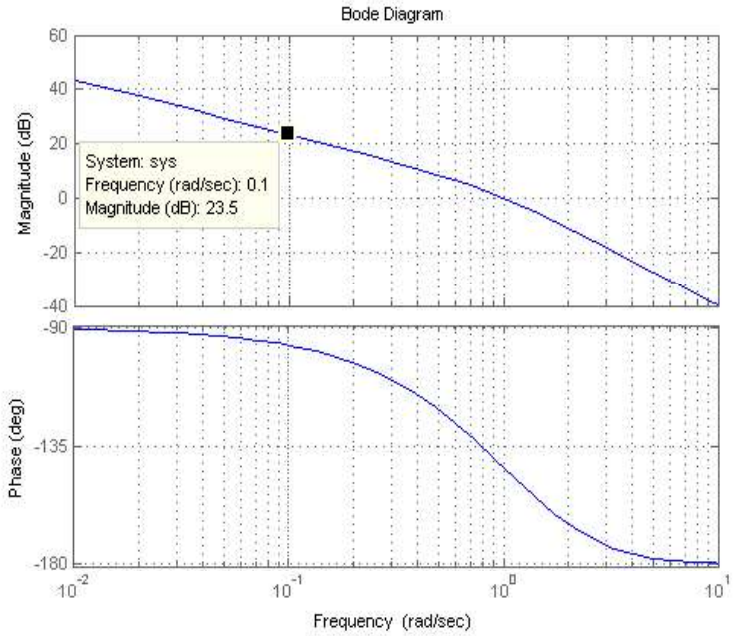


7.5 Überprüfung mit Matlab

Auf der Kommandoebene geben Sie bitte folgende Befehle ein

```
>> num = [1 3];
>> den = [1 3 2 0];
>> sys = tf(num,den)

        Transfer function:
             s + 3
        ----------------
        s^3 + 3 s^2 + 2 s

>> bode(sys)
>> grid
```

Oder führen Sie den File Bode_Example2.m aus.



7.5 Bode-Diagramm für PT_2-System I

Amplituden- und Phasengang für ein PT_2-System

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

Für kleine Frequenzen

- Asymptote für kleine Frequenzen

$$G(s)|_{s\to 0} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} = 1 \angle 0° \quad \longrightarrow \quad 20\log|G(j\omega)| = 20\log(1) = 0$$

Für hohe Frequenzen

- Asymptote für hohe Frequenzen

$$G(s)|_{s\to\infty} \approx \omega_0^2/s^2 \;\rightarrow\; G(j\omega) \approx \omega_0^2/(j\omega)^2 = -\omega_0^2/\omega^2 = \omega_0^2/\omega^2 \angle -180°$$

- Der Amplitudengang ist somit

$$20\ log\ |G(j\omega)| = 20\ log\ \omega_0^2 - 20\ log\ \omega^2 = 20\ log\ \omega_0^2 - 40\ log\ \omega$$

- Dies ist eine Gerade, doppelt so steil (- 40 dB/Dekade) wie bei einem System erster Ordnung

7.5 Bode-Diagramm für PT_2-System II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Amplitudengang für:

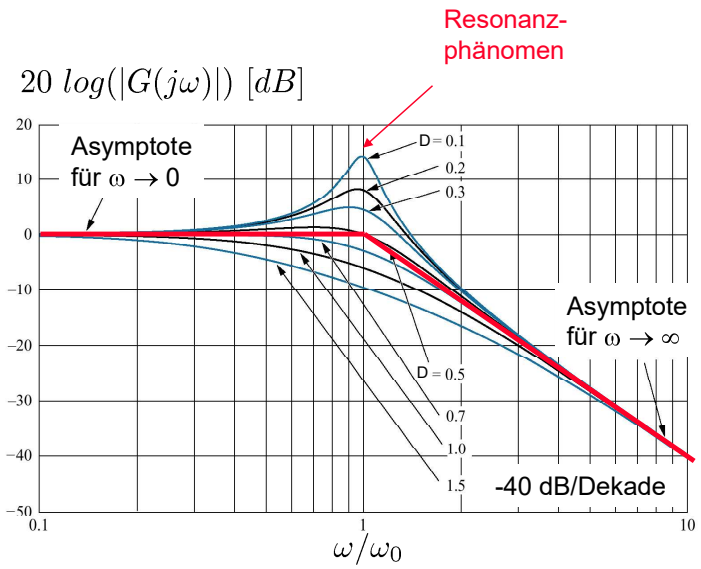
$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

- Darstellung des Amplitudengangs

  $20\ log(|G(j\omega)|)$

  und Skalierung ω/ω_0

- Knick des Asymptotenverlaufs (-40 dB/Dek.) bei der Eigenfrequenz ω_0.



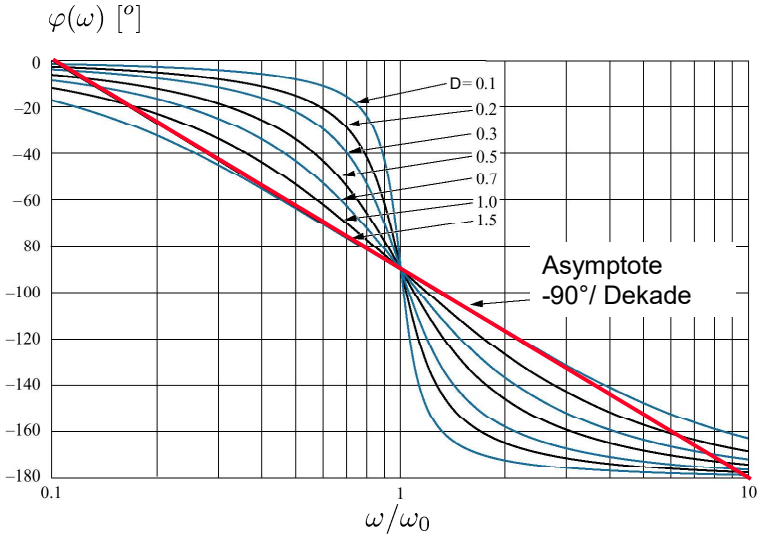
7.5 Bode-Diagramm für PT_2-System III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Phasengang für:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

- Der Phasengang verläuft von anfänglich 0° hin zu -180° für große Frequenzen
- bei der Eigenfrequenz ω_0 beträgt die Phase $\varphi(\omega_0) = -90^o$



7.5 Amplituden- und Phasengang für PT_2-System

Freq. ω/ω_0	Ampl. [dB] $D = 0.1$	Phase [°] $D = 0.1$	Ampl. [dB] $D = 0.2$	Phase [°] $D = 0.2$	Ampl. [dB] $D = 0.3$	Phase [°] $D = 0.3$
0.10	0.09	−1.16	0.08	−2.31	0.07	−3.47
0.20	0.35	−2.39	0.32	−4.76	0.29	−7.13
0.30	0.80	−3.77	0.74	−7.51	0.65	−11.19
0.40	1.48	−5.44	1.36	−10.78	1.17	−15.95
0.50	2.42	−7.59	2.20	−14.93	1.85	−21.80
0.60	3.73	−10.62	3.30	−20.56	2.68	−29.36
0.70	5.53	−15.35	4.70	−28.77	3.60	−39.47
0.80	8.09	−23.96	6.35	−41.63	4.44	−53.13
0.90	11.64	−43.45	7.81	−62.18	4.85	−70.62
1.00	13.98	−90.00	7.96	−90.00	4.44	−90.00
1.10	10.34	−133.67	6.24	−115.51	3.19	−107.65
1.20	6.00	−151.39	3.73	−132.51	1.48	−121.43
1.30	2.65	−159.35	1.27	−143.00	−0.35	−131.50
1.40	0.00	−163.74	−0.92	−149.74	−2.11	−138.81
1.50	−2.18	−166.50	−2.84	−154.36	−3.75	−144.25
1.60	−4.04	−168.41	−4.54	−157.69	−5.26	−148.39
1.70	−5.67	−169.80	−6.06	−160.21	−6.64	−151.65
1.80	−7.12	−170.87	−7.43	−162.18	−7.91	−154.26
1.90	−8.42	−171.72	−8.69	−163.77	−9.09	−156.41
2.00	−9.62	−172.41	−9.84	−165.07	−10.19	−158.20
3.00	−18.09	−175.71	−18.16	−171.47	−18.28	−167.32
4.00	−23.53	−176.95	−23.57	−173.91	−23.63	−170.91
5.00	−27.61	−177.61	−27.63	−175.24	−27.67	−172.87
6.00	−30.89	−178.04	−30.90	−176.08	−30.93	−174.13
7.00	−33.63	−178.33	−33.64	−176.66	−33.66	−175.00
8.00	−35.99	−178.55	−36.00	−177.09	−36.01	−175.64
9.00	−38.06	−178.71	−38.07	−177.42	−38.08	−176.14
10.00	−39.91	−178.84	−39.92	−177.69	−39.93	−176.53

Freq. ω/ω_0	Ampl. [dB] $D = 0.5$	Phase [°] $D = 0.5$	Ampl. [dB] $D = 0.7$	Phase [°] $D = 0.7$	Ampl. [dB] $D = 1$	Phase [°] $D = 1$
0.10	0.04	−5.77	0.00	−8.05	−0.09	−11.42
0.20	0.17	−11.77	0.00	−16.26	−0.34	−22.62
0.30	0.37	−18.25	−0.02	−24.78	−0.75	−33.40
0.40	0.63	−25.46	−0.08	−33.69	−1.29	−43.60
0.50	0.90	−33.69	−0.22	−43.03	−1.94	−53.13
0.60	1.14	−43.15	−0.47	−52.70	−2.67	−61.93
0.70	1.25	−53.92	−0.87	−62.51	−3.46	−69.98
0.80	1.14	−65.77	−1.41	−72.18	−4.30	−77.32
0.90	0.73	−78.08	−2.11	−81.42	−5.15	−83.97
1.00	0.00	−90.00	−2.92	−90.00	−6.02	−90.00
1.10	−0.98	−100.81	−3.83	−97.77	−6.89	−95.45
1.20	−2.13	−110.14	−4.79	−104.68	−7.75	−100.39
1.30	−3.36	−117.96	−5.78	−110.76	−8.60	−104.86
1.40	−4.60	−124.44	−6.78	−116.10	−9.43	−108.92
1.50	−5.81	−129.81	−7.76	−120.76	−10.24	−112.62
1.60	−6.98	−134.27	−8.72	−124.85	−11.03	−115.99
1.70	−8.10	−138.03	−9.66	−128.45	−11.80	−119.07
1.80	−9.17	−141.22	−10.56	−131.63	−12.55	−121.89
1.90	−10.18	−143.95	−11.43	−134.46	−13.27	−124.48
2.00	−11.14	−146.31	−12.26	−136.97	−13.98	−126.87
3.00	−18.63	−159.44	−19.12	−152.30	−20.00	−143.13
4.00	−23.82	−165.07	−24.09	−159.53	−24.61	−151.93
5.00	−27.79	−168.23	−27.96	−163.74	−28.30	−157.38
6.00	−31.01	−170.27	−31.12	−166.50	−31.36	−161.08
7.00	−33.72	−171.70	−33.80	−168.46	−33.98	−163.74
8.00	−36.06	−172.76	−36.12	−169.92	−36.26	−165.75
9.00	−38.12	−173.58	−38.17	−171.05	−38.28	−167.32
10.00	−39.96	−174.23	−40.00	−171.95	−40.09	−168.58

7.5 Abschlussbemerkungen

Bode-Diagramme sind überaus nützlich, da sie mittels Asymptotenverläufen skizziert werden können.

- Die Asymptoten der einzelnen Amplitudengänge können direkt stückweise addiert bzw. subtrahiert werden, sofern sie logarithmisch dargestellt werden.
- Die Asymptoten der einzelnen Phasengänge können direkt stückweise addiert bzw. subtrahiert werden.

Eine Normalisierung sollte so erfolgen, dass die Systemantwort für $\omega \to 0$ die Gesamtverstärkung 1 hat.

- Dann beginnen die zugehörigen niederfrequenten Asymptoten alle bei 0 dB.
- Die stückweise Addition und Subtraktion muss ggf. mit einer Tabelle unterstützt werden.

Die wirklichen Amplituden- und Phasengänge können von den Asymptoten etwas abweichen, insbesondere wenn Resonanzphänomene auftreten.

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

7.1 Einführung
7.2 Frequenzgang und Ortskurve
7.3 Das Bode-Diagramm
7.4 Asymptoten im Bode-Diagramm für Polynome erster Ordnung
7.5 Bode-Diagramm für Systeme höherer Ordnung
7.6 Hausaufgaben

7.6 Hausaufgaben

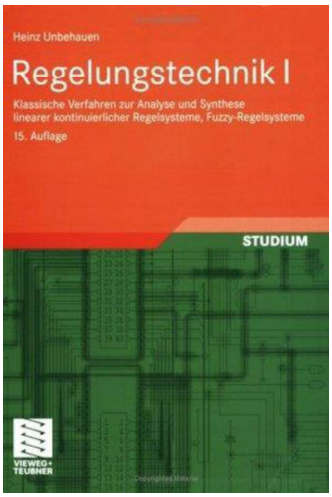
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hausaufgabe:

- Wiederholen Sie dieses Skript.

Zum Weiterlesen:

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
  - Lesen Sie Kap. 4.3



Zum Selbststudium (auf Englisch)

- `http://www.engin.umich.edu/class/ctms/freq/freq.htm`

8. Stabilität linearer Systeme

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

Systemtheorie 1

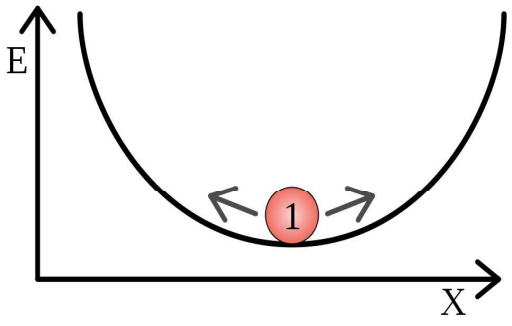
Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

8.1 Einleitung
- **Warum ist Stabilität eine wichtige Eigenschaft?**
- **Definition des Begriffs "Stabilität"**

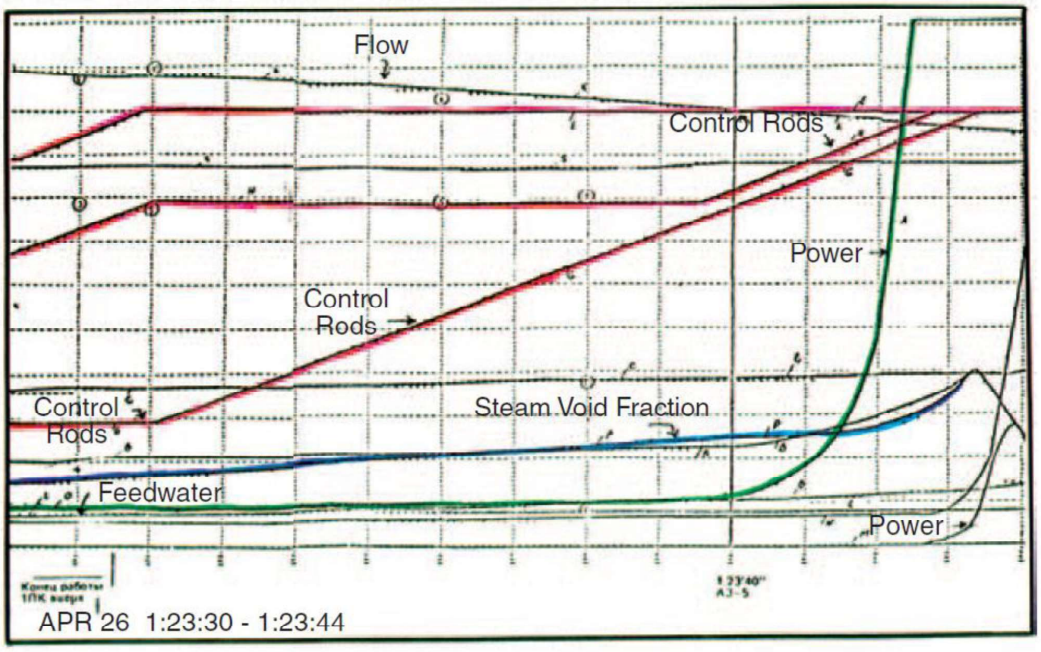
8.2 Algebraische Stabilitätskriterien
8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Methode
8.4 Resonanz versus Stabilität
8.5 Hausaufgaben



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/45/Stability.svg/1000px-Stability.svg.png

8.1 Warum ist Stabilität eine wichtige Eigenschaft?

RWTH AACHEN UNIVERSITY



Aus: Gunter Stein, „Respect the Unstable“, IEEE Control Systems Magazine, August 2003, pp. 12-25.

8.1 Warum ist Stabilität eine wichtige Eigenschaft?

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Instabilität beim Landeanflug

Saab JAS 39 Gripen - https://www.youtube.com/watch?v=k6yVU_yYtEc

8.1 Warum ist Stabilität eine wichtige Eigenschaft?

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Instabilität ist ein gefährlicher System-Zustand, da er das System zerstören und Benutzer gefährden kann.

- Der Nachweis von Stabilität ist für die Auslegung eines Regelungssystems sehr wichtig und wird als **entscheidender Sicherheitsnachweis** betrachtet.

Ein prominentes Beispiel ist die Regelung der Energieumsetzung in einem Atomkraftwerk. Eine Instabilität führt zu verheerenden Konsequenzen (Tschernobyl, p.3.)

- Weiteres Beispiel: Flugregelung bei einem Kampfjet (vgl. Saab Gripen, p. 4)

- „Der Eurofighter ist ein im Unterschallbereich aerodynamisch um die Querachse **instabiles** Flugzeug.
- Statisch instabil bedeutet, dass der Punkt, an dem die gesamte Auftriebskraft angreift, vor dem Masseschwerpunkt liegt. Das Flugzeug ist somit bestrebt, stets die Nase nach oben zu ziehen.
- Dies verhindern die **Flugkontrollcomputer** (FCC), da selbst im Geradeausflug permanente, schnelle und präzise Ruderbewegungen zur **Fluglagenstabilisierung** erforderlich sind und somit eine manuelle, direkte Steuerung durch einen Piloten nicht machbar ist.“

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Typhoon_f2_zj910_arp.jpg

Zitiert aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Eurofighter#Geschichte

8.1 Definition des Begriffs “Stabilität”

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition 1:

- Ein kontinuierliches System ist stabil, wenn die Impulsantwort des Systems abklingt, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

Alternativ kann man die Stabilitätsaussage auch auf die Reaktion auf Anfangsbedingungen beziehen.

Definition 2:

- Ein kontinuierliches System ist stabil, wenn die Antwort auf Anfangsbedingungen (homogene Lösung) abklingt, d.h. $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und gegebene

$$y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), ..., \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$$

Alternativ kann man die Stabilitätsaussage auch auf die Reaktion eines Systems auf ein in der Amplitude beschränktes Eingangssignal beziehen:

Definition 3:

- Ein kontinuierliches System ist **BIBO-stabil**, wenn ein beschränktes Eingangssignal immer eine beschränkte Systemantwort generiert (*every bounded input produces a bounded output*, so called „BIBO stability“).

8.1 Energetische Betrachtung

Stabilität (lat. *stabilis* = fest (stehend)) bezieht sich auf die Fähigkeit eines Systems, nach Auslenkung wieder zurück in eine Ruhelage zu kehren.

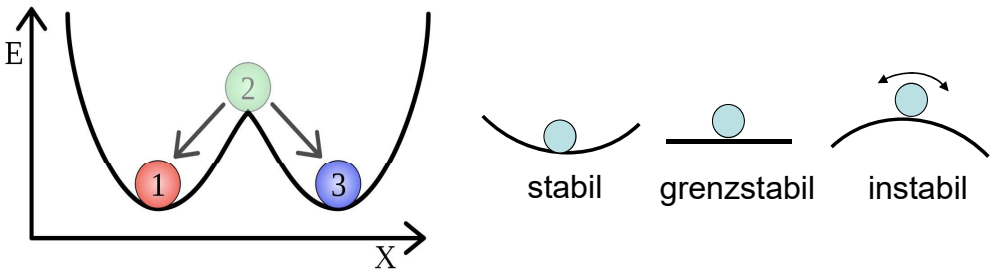
- Zustand 1 und 3 sind stabil.

Das Gegenteil von Stabilität wird als „Instabilität“ bezeichnet.

- Zustand 2 ist instabil.

Wie das Bild andeutet, hat der Stabilitätsbegriff etwas mit minimaler potentieller Energie zu tun …

- Stabile Systeme haben in der stabilen Ruhelage ein Minimum der potentiellen Energie.



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/54/Bistability.svg/1000px-Bistability.svg.png

8.1 Was nützt uns das für die Stabilität linearer Systeme?

Für jedes lineare System, das sich durch eine gewöhnliche Dgl. mit konstanten Koeffizienten beschreiben lässt und Laplace-transformierbar ist, gilt:

- Die Impulsantwort besteht aus eine Summe von Exponentialfunktionen
- Jeder reelle Pol $s = -a$ generiert ein Ke^{-at}.
- Jedes konjugiert-komplexe Polpaar $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ erzeugt eine Kombination von komplexen Exponentialfunktionen $K_1 e^{-(\alpha+j\omega_d)t}$ und $K_2 e^{-(\alpha-j\omega_d)t}$, welche zu gedämpften Sinusfunktionen führen.
  - Hierbei müssen die Koeffizienten K_i an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

Übung:

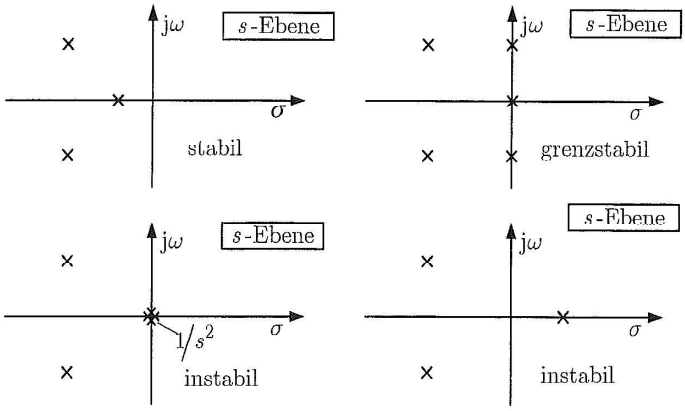
- Wie viele (hoffentlich abklingende) Exponentialfunktionen werden maximal von einem System dritter Ordnung erzeugt?
- Wie viele (hoffentlich abklingende) Sinus-Funktionen werden maximal von einem System dritter Ordnung erzeugt?

Frage: was ist eigentlich mit Polen, die einen positiven Realteil haben?

8.1 Stabilitätsaussage für lineare zeitinvariante Systeme

Stabilitätsaussage für **lineare zeitinvariante** (*linear time-invariant*, LTI) Systeme mit gebrochen-rationaler Übertragungsfunktion $G(s)$.

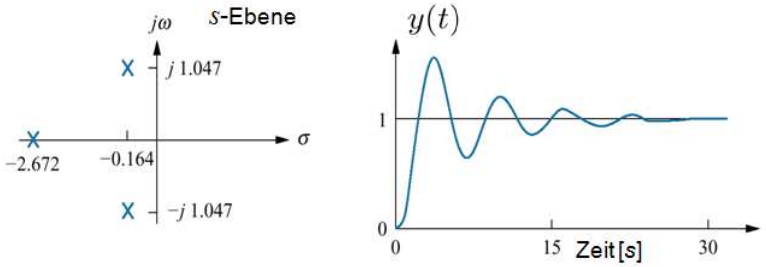
1. Ein System ist **asymptotisch stabil**, wenn alle Pole einen negativen Realteil haben.
2. Ein System ist **instabil**, wenn mindestens ein Pol einen positiven Realteil hat, oder wenn es Mehrfachpole auf der imaginären Achse hat.
3. Ein System ist **grenzstabil**, wenn es einen oder mehrere verschiedene Pole auf der imaginären Achse und im übrigen nur stabile Pole hat.



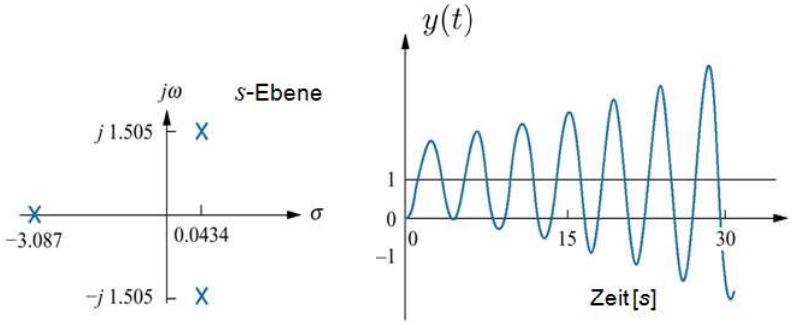
Aus: H. Unbehauen, „Regelungstechnik I", 15. Auflage, Vieweg + Teubner, Wiebaden, Bild 6.1.1, p. 145.

8.1 Beispiele: Pol-Nullstellen-Verteilung und resultierende Übergangsfunktionen

Stabiles System



Instabiles System



Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

8.1 Einleitung

8.2 Algebraische Stabilitäts-Kriterien

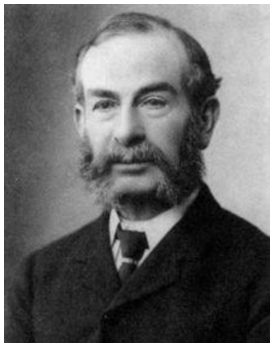
- **Hurwitz-Kriterium**
- **Routh-Kriterium**

8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Methode

8.4 Resonanz versus Stabilität

8.5 Hausaufgaben

Adolf Hurwitz
Deutscher Mathematiker
* 26. März 1859 in Hildesheim
† 18. Nov. 1919 in Zürich
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d1/Adolf_Hurwitz.jpg



Edward John Routh
Englischer Mathematiker
* 20 Jan. 1831 in Quebec, CA
† 7 Juni 1907 in Cambridge, UK
http://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Routh

8.2 Stabilitätskriterium nach Hurwitz (1895)

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Analytische Berechnung der Lage der Nullstellen des **Nennerpolynoms** bzw. der **charakteristischen Gleichung**

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$
$$= a_n \cdot (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n) = 0$$

- im s-Bereich von Hand einfach durchführbar für $n \leq 2$ (pq-Formel)
- umfangreich für $n = 3$ und 4 (→ Bronstein) und nur numerisch machbar für $n > 4$.

Stabilität war auch schon vor 100 Jahren ein wichtiger Begriff (während die exakte Lage der Pole sekundär war). Digitalrechner gab es ja noch nicht …

- Damalige Frage: wie kann man aus den Koeffizienten einer homogenen Dgl. ohne Rechnung auf die Stabilität schließen? Oder anders formuliert: haben eigentlich alle Pole einen neg. Realteil?
  - Stodola, Dampfturbineningenieur, gab 1890 den Anstoß
  - Hurwitz, Mathematiker an der ETH Zürich, löste 1895 das Problem

8.2 Hurwitz-Kriterium (1895)

Notwendige Bedingung für Stabilität:

- alle Koeffizienten a_i sind vorhanden und haben gleiches Vorzeichen:

$$a_i > 0$$

Hinreichende Bedingung für Stabilität:

- Charakteristisches Polynom der Ordnung $n \leq 2$: notwendige Bedingung hinreichend

- Charakteristisches Polynom der Ordnung $n = 3$: notwendige Bedingung und zusätzlich

$$a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0$$

- Charakteristisches Polynom der Ordnung $n = 4$: notwendige Bedingung und zusätzlich

$$-a_4 a_1^2 - a_0 a_3^2 + a_1 a_2 a_3 > 0$$

- Charakteristisches Polynom der Ordnung $n = 5$: notwendige Bedingung und zusätzlich

$$-a_2 a_5 + a_3 a_4 > 0$$

$$-(a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 + (a_3 a_4 - a_2 a_5) \cdot (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$$

8.2 Hurwitz-Kriterium II

Andere Formulierung: ein System ist *dann und nur dann stabil*, wenn

- $a_n > 0$ und alle n sog. „Hurwitz-Determinanten“ $D_i > 0$ sind, wobei

$$D_n = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} D_{H1} & D_{H2} & D_{H3} & & D_{Hn-1} & \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccccc} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \begin{bmatrix} a_0 \text{ wenn n ungerade} \\ a_1 \text{ wenn n gerade} \end{bmatrix} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \begin{bmatrix} a_1 \text{ wenn n ungerade} \\ a_0 \text{ wenn n gerade} \end{bmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{array} \right| \end{array}$$

- Beachte: mit diesem Kriterium wird keine Aussage über den *Grad der Stabilität* gemacht …

8.2 Hurwitz-Kriterium III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

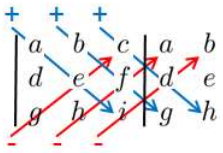
Beispiel: $n = 1$ $\quad \det(D_{H1}) = a_0 > 0$

Beispiel: $n = 2$ $\quad \det(D_{H2}) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_0 > 0$

$\det(D_{H1}) = a_1 > 0$

Wir erinnern uns:
Anwendung der Sarrus'schen Regel:

det(*A*) = *aei* + *bfg* + *cdh* − *gec* − *hfa* − *idb*.



Beispiel: $n = 3$

$$\det(D_{H3}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \cdot (a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0) > 0$$

$$\det(D_{H2}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0 > 0$$

$$\det(D_{H1}) = a_2 > 0$$

8.2 Hurwitz-Kriterium IV

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel: $n = 4$

$$\det(D_{H4}) = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_4 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$= a_0 \cdot \left(a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4\right) > 0$$

$$\det(D_{H3}) = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4$$

$$\det(D_{H2}) = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_1 a_4$$

$$\det(D_{H1}) = a_3$$

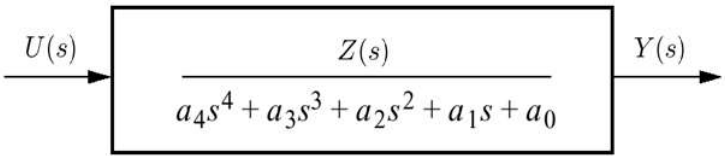
8.2 Routh-Kriterium (Routh, 1877)

Alternative Methode (eng verwandt mit dem Hurwitz-Kriterium) zur Bestimmung der Stabilität, ohne dass die exakte Lage der Pole bestimmt werden muss (englischer Name: *Routh-Hurwitz Criterion*).

- Benannt nach: *Edward John Routh*, englischer Mathematiker (1831-1907)
- Auch dieses Verfahren erlaubt zu bestimmen, wie viele Pole sich in der linken Halbebene, in der rechten Halbebene und auf der imaginären Achsen befinden.
- Aber: auch dieses Verfahren liefert keine Information, wo genau sich die Pole befinden ….

Gegeben sei das folgende System 4-ter Ordnung

- Alle Koeffizienten a_i seien vorhanden und > 0 .



8.2 Routh-Kriterium II

Rezeptur:

- Zunächst werden alle Potenzen von s in absteigender Reihenfolge in eine Tabelle (sog. „Routh-Schema“) eingetragen.
- In die Reihe der höchsten Potenz von s werden anschließend der zugehörige Koeffizient und dann in absteigender Ordnung jeder zweite Koeffizient eingetragen.
- In die zweite Reihe werden, beginnend mit der noch übrigen höchsten Potenz, die übrigen Koeffizienten eingetragen.

Potenz 1. Spalte

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

8.2 Routh-Kriterium III

- Die übrigen Einträge werden durch Kreuzprodukt-Bildung der darüber liegenden Zeilen gebildet:
  - Ab der dritten Zeile ist jeder Eintrag die negative Determinante der darüber liegenden Einträge geteilt durch den darüber liegenden Eintrag ganz links
  - Dabei wird immer von der am weitesten links gelegenen 1. Spalte ausgegangen sowie die Einträge rechts der eigenen Spalte berücksichtigt

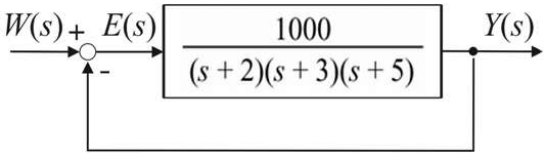
Potenz 1. Spalte

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\frac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

8.2 Beispiel

Aufgabe:

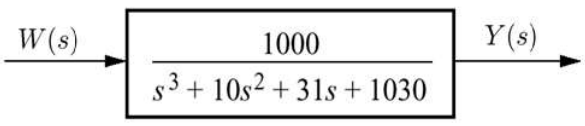
- Gegeben sei das folgende System im geschlossenen Regelkreis. Erzeugen Sie ein Routh-Schema.



Lösung:

- Bestimme zunächst die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.
- Wir stellen fest: $n = 3$.
- Benutze dieses System für die Routh-Tabelle.

$$
\begin{aligned}
a_3 &= 1 \\
a_2 &= 10 \\
a_1 &= 31 \\
a_0 &= 1030
\end{aligned}
$$



8.2 Beispiel

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Für s^3 und s^2 werden direkt die Koeffizienten des Nennerpolynoms verwendet

Danach werden die Kreuzprodukte per Determinantenbildung eingetragen

Beachte:

- falls notwendig oder nützlich, kann man eine komplette Zeile mit einer beliebigen *positiven* Zahl skalieren, ohne die Aussage des Stabilitätskriteriums zu verändern.
- Wir stellen fest, dass sich in den darüber liegenden Reihen jedwede Skalierungsfaktoren (größte gemeinsame Teiler) sowieso herauskürzen.
- Beachte: Eine Skalierung mit *negativen* Zahlen ist nicht erlaubt.

s^3	1	31	0
s^2	~~10~~ 1	~~1030~~ 103	0
s^1	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 31\\ 1 & 103\end{vmatrix}}{1} = -72$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 103\\ -72 & 0\end{vmatrix}}{-72} - 103$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -72 & 0\end{vmatrix}}{-72} - 0$	$\frac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -72 & 0\end{vmatrix}}{-72} - 0$

8.2 Stabilitätsaussage des Routh-Kriteriums

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Für ein beliebiges lineares System gilt:

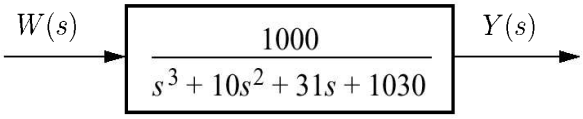
die Zahl der (instabilen) Pole in der rechten Halbebene ist gleich der Zahl der **Vorzeichenwechsel** in der **1. Spalte** des zugehörigen Routh-Schemas.

Fazit:

- Ein **stabiles System** hat **keinen Vorzeichenwechsel** in der ersten Spalte des Routh-Schemas.
- Da das System aus dem vorausgegangenen Beispiel einen solchen Vorzeichenwechsel aufweist, ist es offensichtlich nicht stabil.

Überprüfung mit Matlab:

```
>> polynom = [1 10 31 1030];
>> roots(polynom)
   ans =
   -13.4136
     1.7068 + 8.5950i
     1.7068 - 8.5950i
```



8.2 1. Spezialfall: Nulleinträge in der ersten Spalte

Problem:

- Was passiert, wenn der erste Eintrag einer Zeile eine Null ist? Wir müssten ja dann in der nächsten Zeile durch 0 teilen …

Lösung:

- Wir bestimmen die Stabilität mit der sog. „**Epsilon**"-Methode
- Wir ersetzen eine Null durch ein $\in \rightarrow 0$.
- Wir fahren weiter fort mit der Konstruktion des Routh-Schemas und nutzen das $\in$ wie eine normale Zahl.

Beispiel:

- Betrachte das System

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

- Machen Sie eine Stabilitätsaussage mit dem Routh-Kriterium.

8.2 Beispiel

Lösung:

- Erzeuge das Routh-Schema $G(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$

- Wir stellen fest, dass eine Null in der ersten Spalte (bei s^3) entsteht.
- Wir ersetzen 0 durch $\in$ und fahren fort.

Potenz	1. Spalte		
s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\not{0}\ \epsilon$	$\frac{7}{2}$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

8.2 Beispiel

Zwecks Interpretation nehmen wir nun ein Vorzeichen für $\in$ an (kann positiv oder negativ sein).

- Wir prüfen, ob es unter dieser Annahme Vorzeichenwechsel in der 1. Spalte des Routh-Schemas gibt.

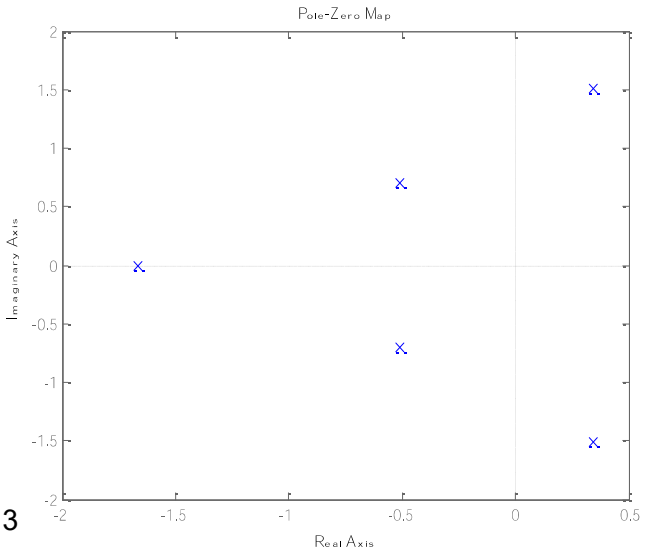
Im **Beispiel** ändert sich das Vorzeichen zweimal → das System ist offensichtlich instabil und hat zwei Pole in der rechten Halbebene.

Potenz	1. Spalte	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	+	+
s^4	2	+	+
s^3	$\not{0}\ \epsilon$	+	−
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	−	+
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	+	+
s^0	3	+	+

8.2 Probe

Probe mit Matlab:

```
>> mypolynom = [1 2 3 6 5 3];
>> roots(mypolynom)

ans =

  0.3429 + 1.5083i
  0.3429 - 1.5083i
 -1.6681
 -0.5088 + 0.7020i
 -0.5088 - 0.7020i
```



Alternativ kann man die folgende Befehlssequenz benutzen:

```
>> mysystem = tf([10],[1 2 3 6 5 3])
Transfer function:
          10
-----------------------------------
s^5 + 2 s^4 + 3 s^3 + 6 s^2 + 5 s + 3
>> pzmap(mysystem)
```

8.2 2. Spezialfall: Nulleinträge in einer Zeile

Manchmal findet sich eine ganze Zeile mit Nulleinträgen. Der Grund dafür ist ein im Nennerpolynom verstecktes gerades Teilpolynom niedriger Ordnung.

- Beachte: für ein gerade Polynom gilt $N'(s) = N'(-s)$.

Beispiel:

- Gegeben sei $G(s) = \dfrac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$. Bestimmen Sie das Routh-Schema.

Ergebnis:

- Erzeuge Tabelle wie bisher.
- In der zweiten Zeile multiplizieren wir mit 1/7.
- In der dritten Zeile finden wir überall Nulleinträge.
- Was tun?

s^5	1	6	8
s^4	~~7~~ 1	~~42~~ 6	~~56~~ 8
s^3	~~0~~ ~~4~~ 1	~~0~~ ~~12~~ 3	~~0~~ ~~0~~ 0
s^2	3	8	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0
s^0	8	0	0

8.2 2. Spezialfall: Nulleinträge in einer Zeile

Rezeptur:

zunächst kehren wir zurück zur Zeile über den Nulleinträgen

Wir formen ein Hilfspolynom $P(s)$ und nutzen dazu alle Einträge in dieser Zeile.

- Die höchste Potenz von $P(s)$ wird die dieser Reihe zugeordnete Potenz sein, außerdem wird es absteigende Potenzen geben, bei denen nur jede zweite besetzt ist.

Für das gegebene Beispiel bedeutet dies

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

- Anschließend wird das Hilfspolynom P(s) nach s differenziert

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

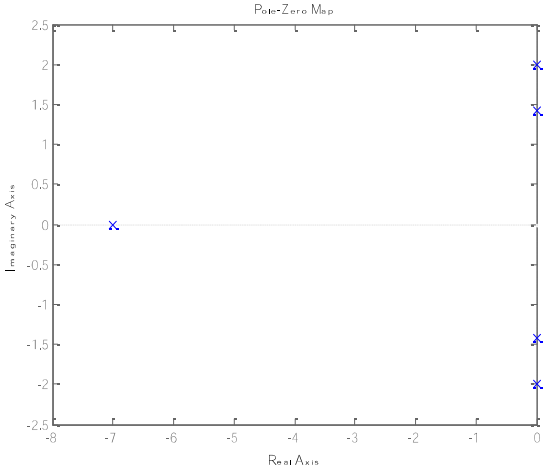
- Die Koeffizienten dieses Polynoms ersetzen die Zeile mit den Nulleinträgen.
- Wir skalieren erneut mit ¼ und fahren mit dem Routh-Schema fort.

- **Resultat:** kein Vorzeichenwechsel → keine Nullstellen in der rechten Halbebene.

8.2 Überprüfung der Lösung in Matlab

Auf der Matlab-Kommandoebene tippen:

```
>> mysystem = tf([10],[1 7 6 42 8 56])

Transfer function:

                10
-----------------------------------------
s^5 + 7 s^4 + 6 s^3 + 42 s^2 + 8 s + 56

>> pzmap(mysystem)
>> roots([1 7 6 42 8 56])

ans =

  -7.0000
  -0.0000 + 2.0000i
  -0.0000 - 2.0000i
  -0.0000 + 1.4142i
  -0.0000 - 1.4142i
```



Beachte: wir haben 2 x 2 Pole auf der imaginären Achse.

8.2 Was steckt dahinter?

Eine komplette Null-Zeile im Routh-Schema entsteht, wenn ein gerades (oder ein ungerades Polynom) ein Faktor des Gesamt-Polynoms ist.

Beachte: gerade Polynome haben Nullstellen, die symmetrisch zum Ursprung liegen.

- Diese Symmetrie entsteht unter drei Bedingungen:

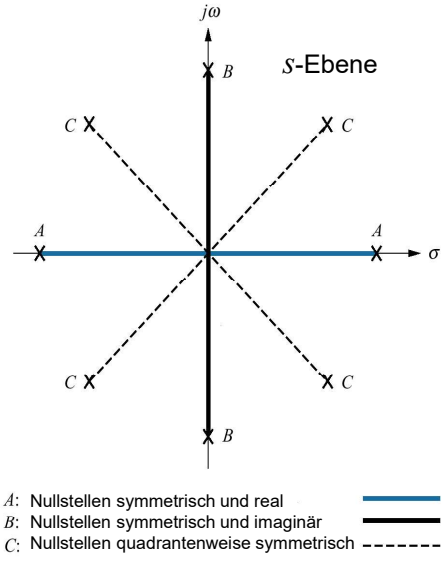
a) Die Nullstellen sind symmetrisch und real

b) Die Nullstellen sind symmetrisch und imaginär

c) Die Nullstellen sind quadrantenweise symmetrisch

Eine komplette Null-Zeile im Routh-Schema zeigt an, dass wir ein gerades Teilpolynom als Faktor in $N(s)$ haben, dessen Nullstellen symmetrisch zum Ursprung liegen.

Einige dieser Nullstellen könnten auf der imaginären Achse liegen, ansonsten wäre das System instabil.



Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

8.1 Einleitung
8.2 Algebraische Stabilitäts-Kriterien
8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Methode
8.4 Resonanz versus Stabilität
8.5 Hausaufgaben

8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Methode

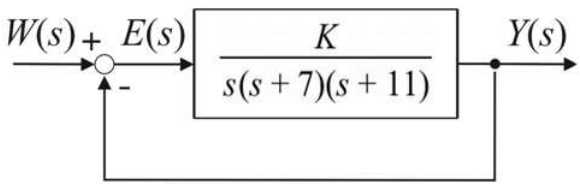
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Mit Hilfe des Routh-Schemas kann man auch Stabilitätsbereiche für bestimmte Parameter bestimmen.

Dies soll an folgendem Beispiel illustriert werden:

Aufgabe:

- Man bestimme den Stabilitätsbereich für den Verstärkungsfaktor $K (K > 0)$ und die Verstärkung für Grenzstabilität



8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Methode II

Lösung:

- Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

- Man bilde das Routh-Schema

- Sei $0 < K < 1386$
  - System ist stabil
  - 3 Pole in der linken Halbebene

- Sei $K > 1386$
  - System ist instabil
  - 2 Pole befinden sich in der rechten Halbebene

Potenz 1. Spalte

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Methode III

Betrachte $K = 1386$

- Wir haben eine Zeile mit Nullen.
- Kehre zurück zur s^2-Zeile und ersetze K durch 1386.
- Bilde das gerade Polynom

$$P(s) = 18s^2 + 1386$$

und seine Ableitung nach s

$$\frac{dP(s)}{ds} = 36s + 0$$

- Da es bis zum Ende der Tabelle keine Vorzeichenänderung mehr gibt, kann man konstatieren: das gerade Polynom hat genau zwei Pole auf der $j\omega$-Achse und die übrigen Pole in der linken Halbebene.

→ Das System ist **grenzstabil.**

Potenz 1. Spalte

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	~~0~~ 36	
s^0	1386	

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

8.1 Einleitung
8.2 Algebraische Stabilitäts-Kriterien
8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Methode
8.4 Resonanz versus Stabilität
8.5 Hausaufgaben

8.4 Was ist eigentlich der Unterschied zwischen Resonanz und Instabilität?

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Resonanz:

- *Vorgang, bei dem ein gedämpft-schwingungsfähiges System mit seiner Resonanzfrequenz (= Eigenfrequenz, falls D = 0) durch Energiezufuhr angeregt wird.*
- *In diesem Fall beträgt die Phasenverschiebung zwischen Erreger und erzwungener Schwingung 90 Grad, der Energieübertrag auf das schwingungsfähige System ist in diesem Fall maximal. Hierdurch kann die Amplitude des angeregten Systems auf ein Vielfaches der Erregeramplitude ansteigen.*
  - Aus: `http://de.wikipedia.org/wiki/Resonanz_(Physik)`

- Ein System zweiter Ordnung habe eine relative Dämpfung $\alpha = D\omega_0$.
- Wenn es als PT_2-System modelliert werden kann, hat es Pole bei $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$. Dabei ist ω_0 die Eigenfrequenz und ω_d die gedämpfte Kreisfrequenz.
- Wir postulieren: das System habe eine Resonanzfrequenz $\omega_r < \omega_d < \omega_0$.

- Merke: Falls das System mit ω_r angeregt wird, können je nach Dämpfungsgrad selbst kleine Anregungen große Schwingungsamplituden erzeugen.

8.4 Wiederholung: Bode-Diagramm für PT_2-System

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Amplitudengang für:

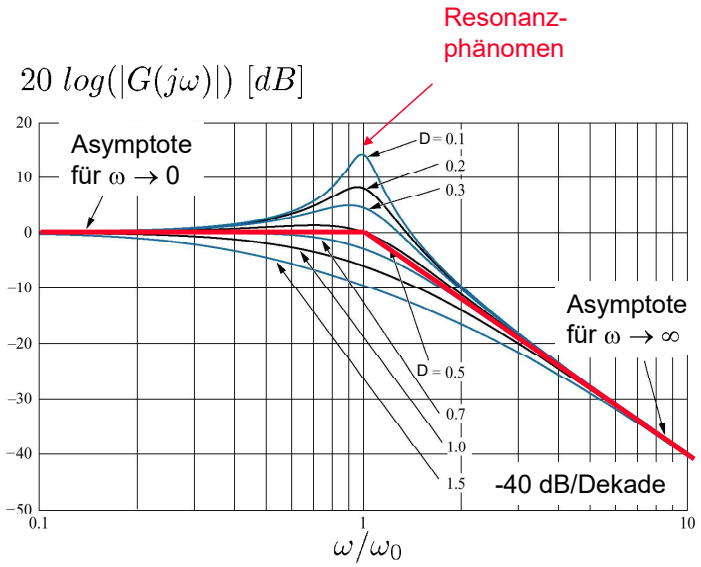
$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

- Darstellung des Amplitudengangs

  $20\ log(|G(j\omega)|)$

  und Skalierung ω/ω_0

- Knick des Asymptotenverlaufs (- 40 dB/Dek.) bei der Eigenfrequenz ω_0.



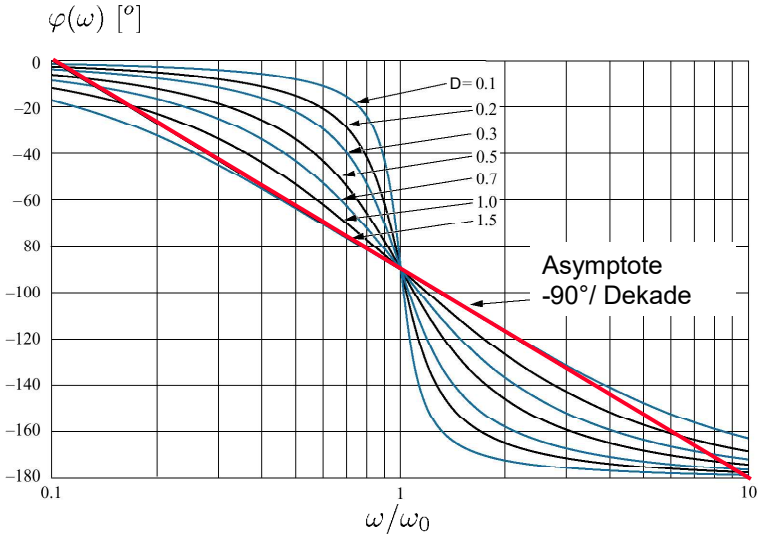
8.4 Wiederholung: Bode-Diagramm für PT_2-System

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Phasengang für:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

- Der Phasengang verläuft von anfänglich 0° hin zu -180° für große Frequenzen
- bei der Eigenfrequenz beträgt die Phase ω_0 = 90°



Berechnung der Resonanzfrequenz ω_r

- Sei $$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{s}{\omega_0} + 1}$$
- Frequenzgang $$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{j\omega}{\omega_0}} = K \cdot \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j\left(2D\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2D\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

→ Amplitudengang $$|G(j\omega)| = A(\omega) = K \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2D\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

→ Phasengang $$\varphi(\omega) = -\ arctan \frac{2D\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Frage:

wo ist die Frequenz, bei der A(ω) maximal wird? Diese Frequenz wollen wir die „*Resonanzfrequenz*“ ω_r nennen …

Berechnung der Resonanzfrequenz ω_r

- Der Amplitudengang wird maximal, wenn der Radikand im Nenner minimal wird

$$|G(j\omega)_{max}| = A(\omega)_{max} = A(\omega_r)$$

$$\Leftrightarrow \quad a(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2D\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \quad min$$

- Berechnung der Ableitung und Nullsetzen

$$\left.\frac{da(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_r} = 0 = 2 \cdot \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot \left(-2\frac{\omega_r}{\omega_0^2}\right) + 2\left(2D\frac{\omega_r}{\omega_0}\right) \cdot \left(\frac{2D}{\omega_0}\right)$$

$$= -1 + \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 + 2D^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\omega_r = \omega_o\sqrt{1 - 2D^2} \quad \forall \quad D < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Fazit:

$\omega_r < \omega_d < \omega_0$

Eigenfrequenz ohne Dämpfung ω_0

gedämpfte natürliche Frequenz $\omega_d = \omega_o\sqrt{1 - D^2} \quad \forall \quad D < 1$

Resonanzfrequenz $\omega_r = \omega_o\sqrt{1 - 2D^2} \quad \forall \quad D < \frac{1}{\sqrt{2}}$

8.4 Was ist eigentlich der Unterschied zwischen Resonanz und Instabilität?

Die Vermeidung von Resonanzkatastrophen ist besonders wichtig bei der Auslegung von Gebäuden, Hochhäusern und Brücken

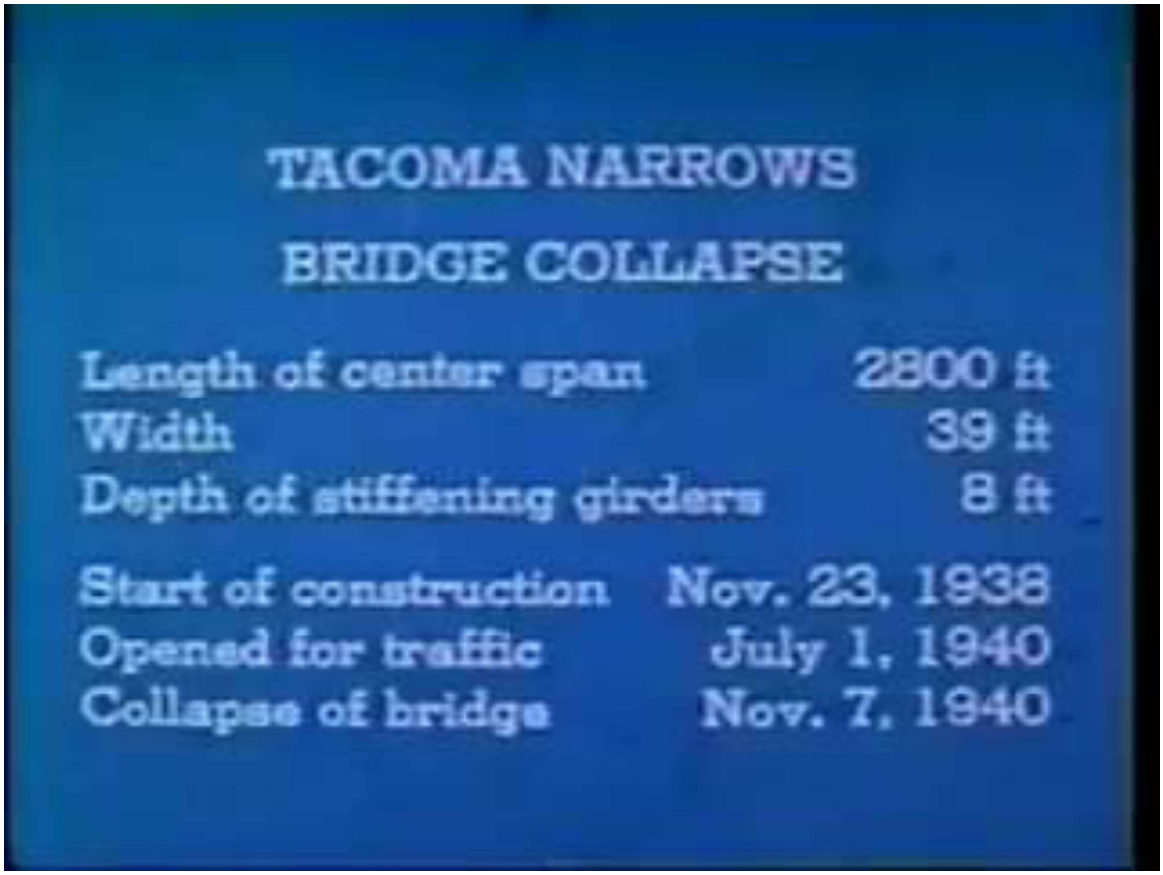
http://home.messiah.edu/~barrett/br_an.gif

Merke:

- **Resonanzkatastrophen** können also auch in Systemen auftreten, die an sich stabil sind (mit Polen in der LHP).
  - Die zerstörerisch wirkende Energie kommt aus der Anregung
  - Die Resonanzüberhöhung ist am höchsten, wenn ausgerechnet mit der Resonanzfrequenz ω_r angeregt wird …

- **Instabilität** ist insofern noch gefährlicher, weil der Crash unmittelbar zwingend ist, während er bei der Resonanzkatastrophe nur bei externer Anregung auftritt …
  - Die zur Zerstörung führende Energie entstammt dem System

Tacoma Bridge, 1940



Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

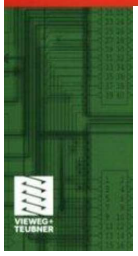
8.1 Einleitung
8.2 Algebraische Stabilitäts-Kriterien
8.3 Reglerauslegung nach der Routh-Hurwitz Methode
8.4 Resonanz versus Stabilität
8.5 Hausaufgaben

8.5 Zum Nachlesen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hausaufgabe:

- Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …



Zur Vertiefung:

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008
  - darin Kap. 6.1 und 6.2

- Gunter Stein, „Respect the Unstable“, IEEE Control Systems Magazine, August 2003, pp. 12-25.

8.5 Zum Nachlesen

Hausaufgabe:

- Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …

https://www.youtube.com/watch?v=9Lhu31X94V4

9. Das Nyquist-Kriterium

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

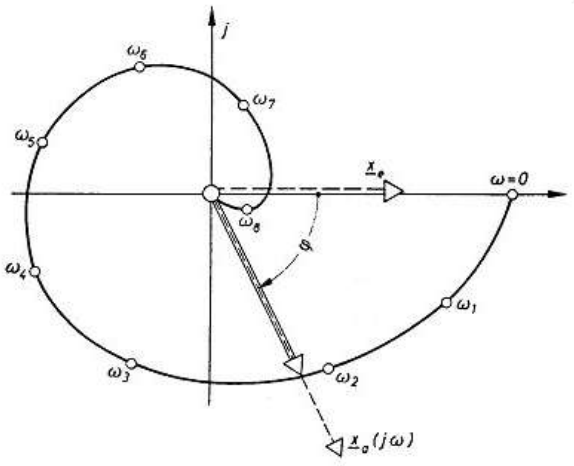
Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

9.1 Einleitung
9.2 Konforme Abbildung
9.3 Das allgemeine Nyquist-Kriterium
- Umgang mit imaginären Polstellen

9.4 Was steckt dahinter?
9.5 Das vereinfachte Nyquist-Kriterium
- Phasenrand und Amplitudenrand
- Darstellung im Bode-Diagramm

9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums
9.7 Hausaufgaben



Nach http://www.hawe.de/lexikon/figures/0001_ortskurve.gif

9.1 Einleitung

Das Nyquist-Kriterium (NYK, veröffentlicht 1932) ist eines der wichtigsten Verfahren zur Ermittlung der Stabilität geschlossener Regelkreise.

Das Nyquist-Kriterium erlaubt eine **Stabilitäts-aussage über den geschlossenen Regelkreis basierend auf der Analyse des dynamischen Verhaltens des offenen Kreises.**

- Es basiert auf dem Frequenzgang des offenen Regelkreises.

Das Nyquist-Kriterium ist eine grafische Methode zur Bestimmung der **absoluten** und der **relativen** Stabilität eines geschlossenen Regelkreises.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/b/b4/Harry_Nyquist.jpg

Harry Nyquist (1889-1976)
* Feb. 7, 1889 in Värmland, Sweden
B.S. and M.S. (1914 / 1915) in EE from U of North Dakota, USA
Ph.D. in Physics from Yale U (1917)
Engineer at AT&T Bell Labs
+ April 4, 1976 in Harlington, TX, USA

9.1 Einleitung II

Beachte:
das NYK ist auch dann anwendbar, wenn das Übertragungsverhalten einzelner Regelkreisglieder nicht parametrisch, sondern in Form von gemessenen Ortskurven vorliegt.

- Alle übrigen Verfahren, die wir kennengelernt haben bzw. kennen lernen werden (z.B. das Hurwitz-, das Routh-Kriterium oder die WOK), funktionieren nur für explizit bekannte gebrochen-rationale Übertragungsfunktionen.
- Im Übrigen: gemessene Ortskurven liegen nur für stabile Systeme vor …

Ferner erlaubt das Nyquist-Kriterium Stabilitätsaussagen, wenn der offene Regelkreis instabile Pole oder Totzeitglieder enthält, z.B.

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \cdot e^{-T_t s}$$

Schließlich:
das Nyquist-Kriterium liefert eine quantitative Aussage zum „**Abstand von der Stabilitätsgrenze**“ (Grad der relativen Stabilität).

Gliederung

9.1 Einleitung
9.2 Konforme Abbildung
9.3 Das allgemeine Nyquist-Kriterium
- Umgang mit imaginären Polstellen

9.4 Was steckt dahinter?
9.5 Das vereinfachte Nyquist-Kriterium
- Phasenrand und Amplitudenrand
- Darstellung im Bode-Diagramm

9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums
9.7 Hausaufgaben

9.2 Konforme Abbildung I

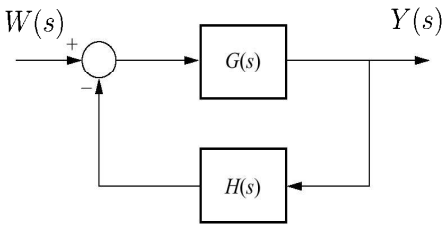
Wir wollen im Folgenden vier wichtige Fragen klären:

1. die Beziehung zwischen den Polen von $G_0(s) = G(s)\,H(s)$ und den Polstellen von $1 + G_0(s) = 1 + G(s)\,H(s)$
2. die Beziehung zwischen den Polen von $G_{ges}(s) = G(s) / (1 + G_0(s))$ und den Nullstellen von $1 + G_0(s)$
3. die Abbildung von komplexen Punkten
4. die Abbildung von komplexen Kurven

Gegeben sei wieder der folgende Regelkreis:

- die Übertragungsfunktion im Vorwärtszweig $G(s) = Z_G(s) / N_G(s)$
- die Übertragungsfunktion des Rückkoppelpfades $H(s) = Z_H(s) / N_H(s)$

$$G_0(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{Z_G(s) \cdot Z_H(s)}{N_G(s) \cdot N_H(s)}$$



9.2 Konforme Abbildung II

$$1 + G_0(s) = 1 + G(s) \cdot H(s) = 1 + \frac{Z_G(s) \cdot Z_H(s)}{N_G(s) \cdot N_H(s)} = \frac{N_G(s) \cdot N_H(s) + Z_G(s) \cdot Z_H(s)}{N_G(s) \cdot N_H(s)}$$

$$G_{ges}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} = \frac{Z_G(s) \cdot N_H(s)}{N_G(s) \cdot N_H(s) + Z_G(s) \cdot Z_H(s)}$$

Wir stellen fest, dass

zu (1): die **Pole** von $1 + G(s)\,H(s)$ sind dieselben Pole wie von $G(s)\,H(s)$, und

zu (2): die **Nullstellen** von $1 + G(s)\,H(s) = 1 + G_0(s)$ entsprechen den **Polen** von $G_{ges}(s)$, der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.

zu (3): Wir erinnern uns: eine beliebige komplexe Zahl in der s-Ebene wird durch eine komplexe Funktion $F(s)$ auf eine andere komplexe Zahl abgebildet.

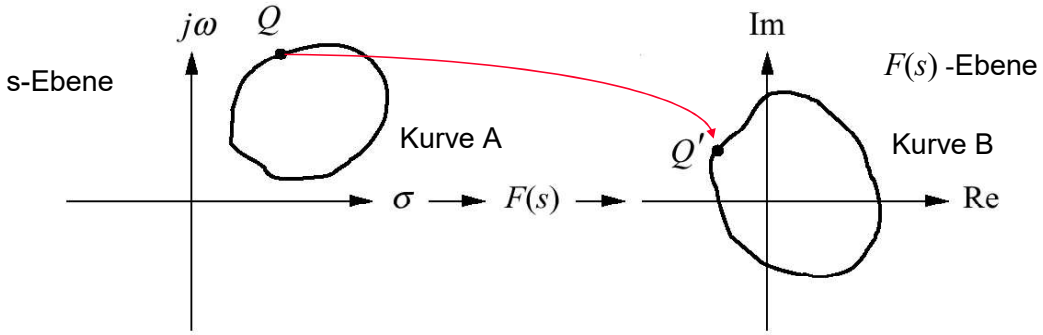
Beispiel:

- Der Punkt $4 + j3$ wird durch die Funktion $F(s) = (s^2 + 2s + 1)$ auf den Punkt $16 + j30$ abgebildet.

9.2 Konforme Abbildung III

zu (4): Abbildung von Kurven:

- Gegeben sei eine Ansammlung von Punkten in der s-Ebene (die Kurve A), die wir über die konforme Abbildung $F(s)$ in die $F(s)$ -Ebene abbilden wollen.



Merke: eine **konforme Abbildung** bedeutet eine **winkel-** und **orientierungstreue** Abbildung, d.h. der Schnittwinkel zwischen zwei Kurven A_1, A_2 in der s-Ebene ist samt Drehsinn der gleiche wie für die beiden zugehörigen Bildkurven B_1, B_2.

- Im Beispiel wird Punkt Q der Kurve A durch eine Funktion $F(s)$ auf den Punkt Q´ der Kurve B abgebildet.

9.2 Konforme Abbildung IV

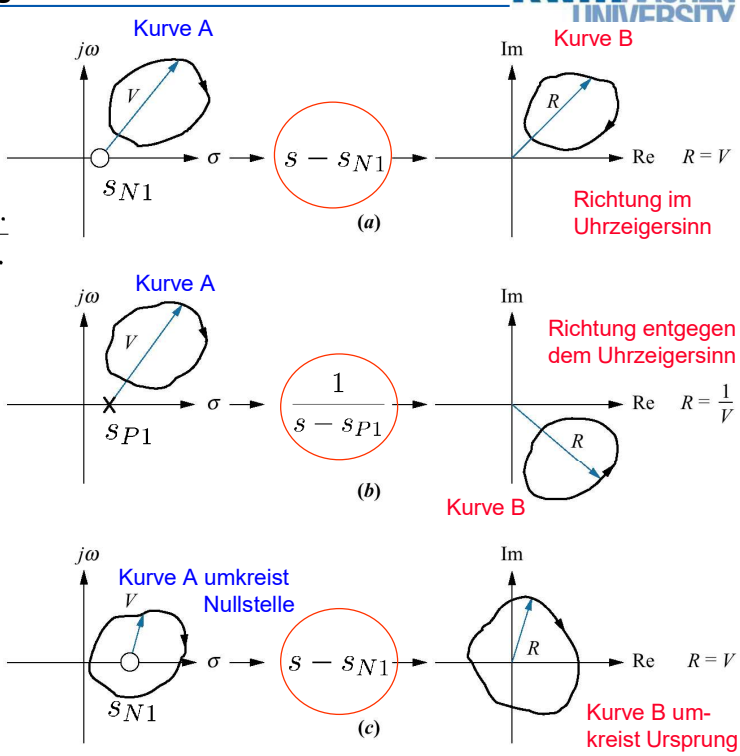
Annahme:

Gegeben sei nun die komplexe Abbildung

$$F(s) = \frac{(s - s_{N1})(s - s_{N2})\ldots}{(s - s_{P1})(s - s_{P2})\ldots}$$

Die Abbildung der Kurve A wird bestimmt durch die Lage von Pol- und Nullstellen von $F(s)$.

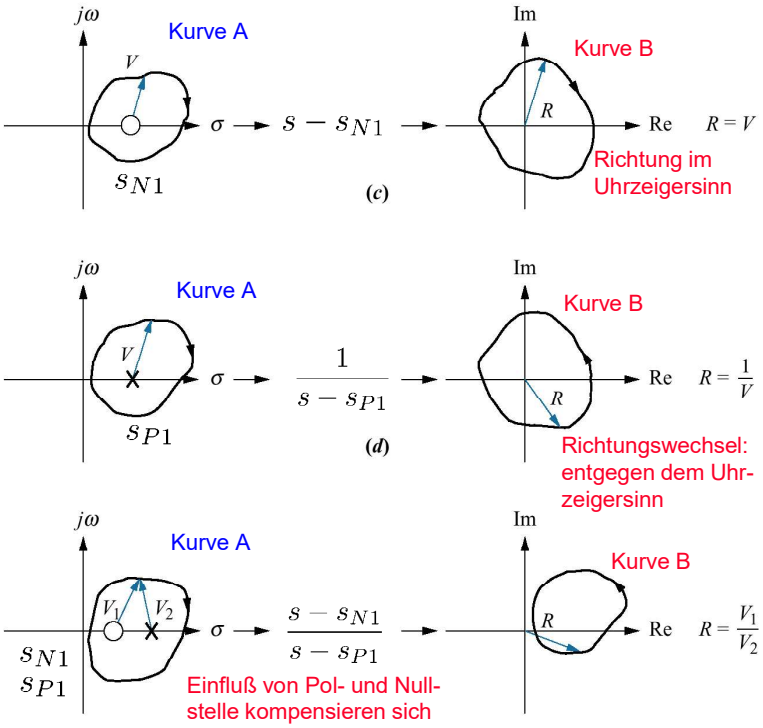
→ Dabei wird der resultierende komplexe Zeiger R im Bildbereich bestimmt durch den komplexen Zeiger V im Urbereich.



9.2 Konforme Abbildung V

Für das Abbildungsverhalten wichtige Unterscheidungsmerkmale sind offenbar:

- wird V von der Kurve A im s-Bereich umfahren?
- Kommt der Zeiger V von einem Pol oder einer Nullstelle?
- Die Antworten auf diese Fragen beeinflussen die Richtung und Lage der Kurve B.



Gliederung

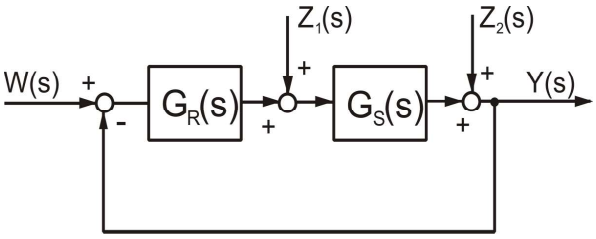
9.1 Einleitung
9.2 Konforme Abbildung
9.3 Das allgemeine Nyquist-Kriterium
- **Umgang mit imaginären Polstellen**

9.4 Was steckt dahinter?
9.5 Das vereinfachte Nyquist-Kriterium
- Phasenrand und Amplitudenrand
- Darstellung im Bode-Diagramm

9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums
9.7 Hausaufgaben

9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens I

Struktur eines Regelkreises in der Standardform:



- für die Ausgangsgröße $Y(s)$ gilt in Abhängigkeit von der Führungsgröße $W(s)$ und den Störgrößen $Z_i(s)$:

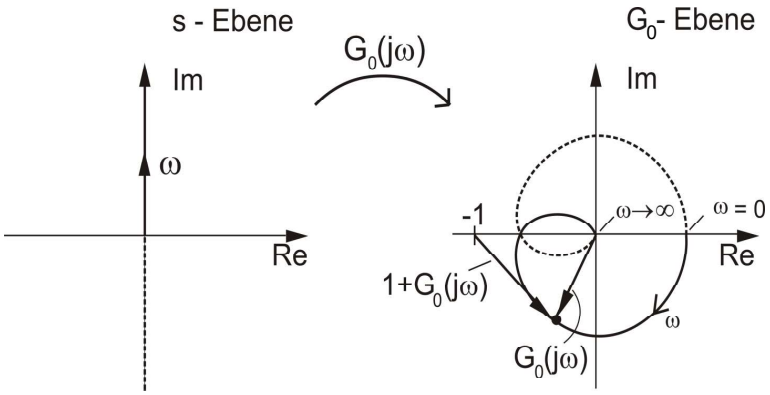
$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_{Z_1}(s) \cdot Z_1(s) + G_{Z_2}(s) \cdot Z_2(s)$$
$$= \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \cdot W(s) + \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \cdot Z_1(s) + \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} \cdot Z_2(s)\,.$$

Wir wissen:

- man nennt das Produkt der einzelnen im Regelkreis auftretenden Glieder die „Übertragungsfunktion des offenen Kreises“ (Schleifenübertragungsfunktion) $G_0(s)$
- Der Regelkreis ist stabil, wenn die Nullstellen seiner charakteristischen Gleichung $1 + G_0(s) = 1 + G_R(s)G_S(s) = 0$ in der linken s-Halbebene liegen.

9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens II

Beachte: der **Frequenzgang** des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$ realisiert eine konforme Abbildung der **imaginären Achse** aus der s-Ebene („*Urbereich*“) auf die G_0-Ebene („*Bildbereich*“)



Merke: Die charakteristische Gleichung $1 + G_0(j\omega)$ des geschlossenen Kreises lässt sich als Zeiger von (-1,0) auf die Ortskurve $G_0(j\omega)$ interpretieren.

9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens III

- Aus den **Änderungen des Phasenwinkels** von $1 + G_0(j\omega)$ beim Durchlaufen der Ortskurve des Frequenzgangs $G_0(j\omega)$ für $\omega = -\infty \ldots +\infty$ lässt sich auf Stabilität bzw. Instabilität schließen.

Betrachten wir zunächst rationale Übertragungsfunktionen:

- Sei zunächst $G_0(s)$ eine rationale Übertragungsfunktion **ohne Nullstellen oder Pole auf der Imaginärachse.**
- Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises ergibt sich zu

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{Z_0(s) + N_0(s)}{N_0(s)} = 0$$

Beachte:

- Wegen $\text{Grad}\,(Z_0) = m$, $\text{Grad}\,(N_0) = n$ und $m < n$ gilt $\text{Grad}\,(Z_0 + N_0) = n$
  → Durch das Schließen des Regelkreises im Standardregelkreis bleibt die Ordnung von $1 + G_0(j\omega)$ im Vergleich zur Übertragungsfunktion $G_0(s)$ erhalten, lediglich die Dynamik verändert sich.

9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens IV

Es seien $s_{P,j}$ (j = 1 … n) die **Pole** des **geschlossenen** Kreises (also die Nullstellen von $N_0 + Z_0 = 0$) und $s_{N,i}$ (i = 1 … n) die Nullstellen des Polynoms $N_0(s)$ und damit die **Pole** des **offenen** Kreises

$$1 + G_0(s) = K \frac{\prod_{j=1}^{n} (s - s_{P,j})}{\prod_{i=1}^{n} (s - s_{N,i})}$$

- Wie schon erwähnt, bildet $G_0(s)$ die Pol-Nullstellen-Konfiguration aus der s-Ebene in die G_0-Ebene ab (konforme Abbildung).

Für die Argumente (Winkel) von $1 + G_0(s)$ folgt nach den Regeln für Hintereinanderschaltung von Übertragungsfunktionen:

$$\angle(1 + G_0(s)) = \angle(K) + \sum_{j=1}^{n} \angle(s - s_{P,j}) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s - s_{N,i}), \quad \text{wobei } \angle(K) = 0\,.$$

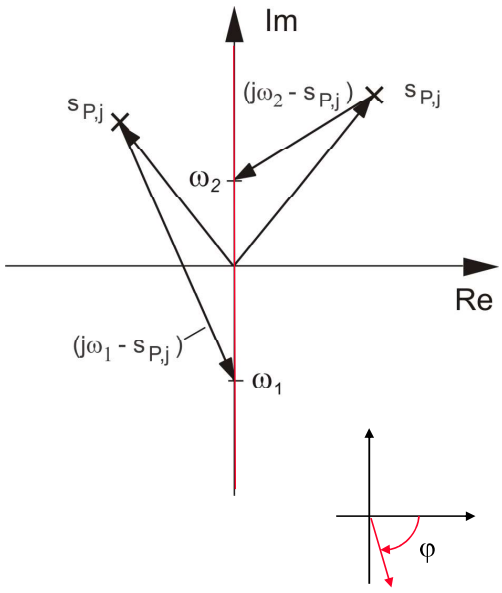
9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens V

Im Folgenden wird nun berechnet, wie die Winkelbeiträge einzelner $s_{P,j}$ (bzw. $s_{N,i}$) von der Lage in der s-Ebene abhängen

Dabei gilt:

- Da die Ortskurve die imaginäre Achse (jω) der s-Ebene in die Ortskurvenebene abbildet, betrachtet man die Änderung (Δ) von $\angle G_0(j\omega)$ im Bereich $-\infty < \omega < \infty$ für jeden Pol $s_{P,j} = \delta + j\omega$

$$\overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}} \angle(s - s_{P,j}) = \begin{Bmatrix} +\pi & \delta < 0 \\ -\pi & \delta > 0 \end{Bmatrix}.$$



- Die einzelnen Winkelbeiträge werden addiert.
- Bei Nullstellen $s_{N,i}$ verfährt man genauso, nur werden die Winkelbeiträge subtrahiert.
- Man läuft dabei auf der imaginären Achse der s-Ebene von 'unten' nach 'oben'.

9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens VI

Werden alle Winkelbeiträge aller Polstellen $s_{P,j}$ und aller Nullstellen $s_{N,i}$ addiert, ergibt sich

$$\overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}} \angle(G_0(j\,\omega)+1) = l_g \cdot (\pi) + r_g \cdot (-\pi) - l_o \cdot (\pi) - r_o \cdot (-\pi)$$
$$= (l_g - r_g)\pi - (l_o - r_o)\pi$$

mit

l_g = Anzahl der Pole $s_{P,j}$ des geschlossenen Kreises links von $j\omega$,
r_g = Anzahl der Pole $s_{P,j}$ des geschlossenen Kreises rechts von $j\omega$,
l_o = Anzahl der Pole $s_{N,i}$ des offenen Kreises links von $j\omega$, $(bekannt)$
r_o = Anzahl der Pole $s_{N,i}$ des offenen Kreises rechts von $j\omega$ $(bekannt)$.

Bei bekanntem Grad n gilt ferner (man hat n Pole und n Nullstellen)

$$l_g = n - r_g\,,$$
$$l_o = n - r_o\,.$$

9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens VII

Setzt man dies ein, so ergibt sich

$$\overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}} \angle(G_0(j\,\omega)+1) = (n-2r_g)\pi - (n-2r_o)\pi$$
$$= 2\pi(r_o - r_g)\,,$$

wobei 2π einen 360°-Umlauf des Zeigers $1 + G_0(\mathrm{j}\omega)$ um (0,0) in mathematisch positiver Richtung der **vollständigen** Ortskurve (für $-\infty < \omega < \infty$) bezeichnet.

Beachte:

- Bisher wurde die Winkeländerung der Ortskurve $1 + G_0(\mathrm{j}\omega)$ bezüglich des Ursprungs (0,0) betrachtet. Da aber $G_0(\mathrm{j}\omega)$ gezeichnet wird, muss diese Gleichung auf den kritischen Punkt (-1,0) und die Ortskurve $G_0(\mathrm{j}\omega)$ angewendet werden.

9.3 Herleitung des allgemeinen Nyquist-Verfahrens VIII

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Version des **vollständigen Nyquist-Kriteriums**

Ist der offene Kreis $G_0(s)$ instabil, liegen also r_0 bekannte Pole rechts der imaginären Achse, so ist der geschlossene Kreis genau dann stabil, d. h. $r_g = 0$, wenn die vollständige Ortskurve des offenen Kreises $G_0(j\omega)$ für $-\infty < \omega < \infty$ den Punkt (−1,0) r_0-mal im Gegenuhrzeigersinn, d. h. im *mathematisch positiven Sinne*, umkreist.

- Merke:
  Durch das vollständige Nyquist-Kriterium wird eine **Beziehung** zwischen der **Ortskurve** (also einer **grafischen Beschreibung** des **offenen Kreises**) und den (unbekannten) **instabilen Polen** des **geschlossenen Kreises** hergestellt.

9.3 Schlussfolgerungen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Stimmt die Anzahl U von Umläufen nicht mit der Anzahl der instabilen Pole des **offenen** Kreises überein, so gilt:

$$r_g = r_o - U\Big|_{-\infty}^{\infty} .$$

Die Anzahl der instabilen Pole des **geschlossenen** Kreises ergibt sich aus der Differenz von instabilen Polen des **offenen** Kreises und der Anzahl U der mathematisch positiven Umläufe um (−1,0).

→ Ist der **offene** Kreis stabil, so ist wegen $r_0 = 0$ der **geschlossene** Kreis nur dann stabil, wenn $G_0(j\omega)$ für $-\infty < \omega < \infty$ den kritischen Punkt (−1,0) nicht umkreist oder durchdringt → **einfaches Nyquist-Kriterium**.

- Wird die Ortskurve nur für ($0 < \omega < \infty$) gezeichnet, so muss die Umlaufzahl halbiert werden, d. h. die Winkeländerung beträgt bei Stabilität ($r_g = 0$) nur:

$$\overset{\infty}{\underset{\omega=0}{\Delta}} \angle(G_0(j\omega) + 1) = \pi \cdot (r_o - r_g) = \pi \cdot r_o$$

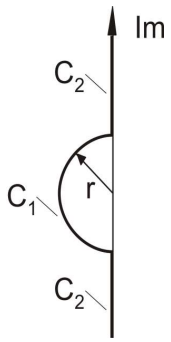
9.3 Verallgemeinerung auf imaginäre Pole I

- Bisher wurden Pole oder Nullstellen auf der imaginären Achse, d.h. $s_{P,j}, s_{N,i} = \pm j\omega$ oder $s_{P,j}, s_{N,i} = 0$, nicht zugelassen.
- Schon um bleibende Regelabweichungen zu vermeiden, sollte aber der offene Regelkreis zumindest einen I-Anteil besitzen, also grenzstabil sein.

Zur Behandlung derartiger Pole oder Nullstellen wird eine geeignete Kontur C gewählt, die die Singularität mit einem kleinen Halbkreis innerhalb der linken Halbebene umgeht. Es gilt:

$$\underset{C}{\Delta}\angle(1+G_0(s)) = \underset{C_1}{\Delta}\angle(1+G_0(s)) + \underset{C_2}{\Delta}\angle(1+G_0(s))\,,$$

wobei der Kurventeil C_1 den Halbkreis und C_2 den Rest der imaginären Achse darstellt. Lässt man jetzt den Radius r des Halbkreises gegen 0 streben, erhält man als Kurve wieder die imaginäre Achse mit Ausnahme der Pole.



9.3 Verallgemeinerung auf imaginäre Pole II

Sei $s_{P,j}$ ein Pol des geschlossenen Kreises, also eine Nullstelle von $1 + G_0(s)$ der Ordnung k, so gilt in seiner Umgebung (Taylor-Reihenentwicklung um $s_{P,j}$):

$$1 + G_0(s) = C_k(s - s_{P,j})^k \cdot (1 + R(s - s_{P,j}))$$

mit Restglied $R(s - s_{P,j}) \to 0$ für $r \to 0$. Damit gilt auf C_1

$$\angle(1 + G_0(s)) = \angle(C_k) + k \cdot \angle(s - s_{P,j}) + \angle(1 + R(s - s_{P,j}))$$

$$\underset{C_1}{\Delta}\angle(1 + G_0(s)) = 0 + k \cdot (-\pi) + \underset{C_1}{\Delta}\angle(1 + R(s - s_{P,j})\,.$$

Im Grenzfall $r \to 0$ geht der letzte Term gegen 0, da $1 + R(s - s_{P,j}) \to 1$ strebt. Es gilt dann:

$$\underset{C_1}{\Delta}\angle(1 + G_0(s)) = -k \cdot \pi.$$

9.3 Verallgemeinerung auf imaginäre Pole III

Analog ergibt sich für einen k-fachen Pol des offenen Kreises (= Nullstelle des geschlossenen Kreises)

$$1 + G_0(s) = \frac{C_k}{(s - s_{N,i})^k} \cdot (1 + R(s - s_{N,i}))$$

$$\Rightarrow \quad \angle(1 + G_0(s)) = \angle(C_k) + (-k) \cdot \angle(s - s_{N,i}) + \angle(1 + R(s - s_{N,i}))\,,$$

$$\underset{C_1}{\Delta}\angle(1 + G_0(s)) = 0 + (-k) \cdot (-\pi) + \underset{C_1}{\Delta}\angle(1 + R(s - s_{N,i}))$$

$$\Rightarrow \quad \underset{C_1}{\Delta}\angle(1 + G_0(s)) = +k \cdot \pi.$$

9.3 Verallgemeinerung auf imaginäre Pole IV

Für die ganze Kurve C gilt nun mit a_0 und a_g der Anzahl der Pole des offenen bzw. geschlossenen Kreises auf der imaginären Achse:

$$\begin{aligned}\underset{C}{\Delta}\angle(1 + G_0(s)) &= \overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}}\angle(1 + G_0(s)) + \underset{C_1}{\Delta}\angle(1 + G_0(s)) \\ &= \overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}}\angle(1 + G_0(s)) + (a_o - a_g) \cdot \pi\,.\end{aligned}$$

Da a_0 und a_g rechts von C liegen und somit hier als volle instabile Pole gezählt werden, folgt daraus

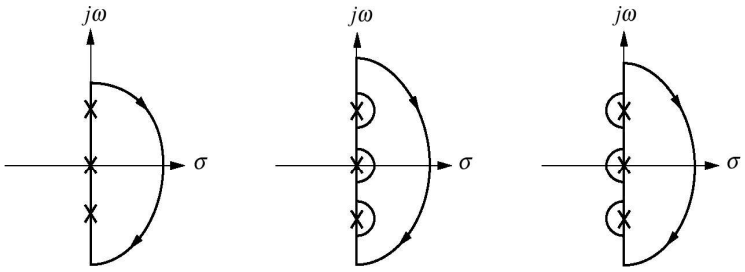
$$\begin{aligned}\overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}}\angle(1 + G_0(s)) &= \underset{C}{\Delta}\angle(1 + G_0(s)) - (a_o - a_g) \cdot \pi \\ &= (r_o - r_g) \cdot 2\pi + (a_o - a_g) \cdot 2\pi - (a_o - a_g) \cdot \pi \\ &= (r_o - r_g) \cdot 2\pi + (a_o - a_g) \cdot \pi\,.\end{aligned}$$

9.3 Verallgemeinerung auf imaginäre Pole V

Hätte man den Halbkreis C_1 rechts um die grenzstabilen Pole gelegt, kehrten sich in den obigen Beziehungen die Vorzeichen um. Da jetzt a_0 und a_g links der Kurve liegen und somit als stabile Pole gezählt werden, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \angle(1+G_0(s)) &= \Delta_C \angle(1+G_0(s)) + (a_o - a_g)\cdot\pi \\ &= (r_o - r_g)\cdot 2\pi + (a_o - a_g)\pi\,.\end{aligned}$$

→ Es macht keinen Unterschied, ob Pole auf der imaginären Achse (links) als instabile Pole innerhalb der Kurve (Mitte) oder als stabile Pole außerhalb der Kurve (rechts) gezählt werden …



9.3 Verallgemeinerung auf imaginäre Pole V

Wir können jetzt die **endgültige Fassung des Nyquist-Kriteriums** formulieren:

Allgemeines **Nyquist-Kriterium:**

Der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil, wenn die vollständige Ortskurve des offenen Kreises $G_0(\mathrm{j}\omega)$ den kritischen Punkt (−1, 0) $r_0 + a_0/2$ mal im Gegenuhrzeigersinn, d. h. **im mathematisch positiven Sinne,** umkreist.

- Hierbei geben r_0 und a_0 die Zahl der instabilen bzw. grenzstabilen Pole des **offenen** Regelkreises an.

9.3 Anmerkungen

Man kann zeigen, daß obiges Kriterium auch für Totzeitglieder erfüllt ist. Damit ist das **Nyquist-Kriterium** das **einzige Stabilitätskriterium**, dass auch auf **totzeit-behaftete** Systeme anwendbar ist.

- Die Frequenzgangs-Ortskurve eines Systems mit I-Verhalten kommt für $\omega = 0$ aus dem Unendlichen, bei Verzögerungsgliedern beginnt sie auf der reellen Achse.

Jeder Pol wird so oft gezählt, wie seine Ordnung beträgt (Beachte: konjugiert komplexes Polpaar = 2 Pole).

Die Anzahl der **instabilen und grenzstabilen** Pole des geschlossenen Kreises kann bestimmt werden aus:

$$r_g + \frac{a_g}{2} = r_o + \frac{a_o}{2} - U\Big|_{-\infty}^{\infty} \quad \text{bzw.} \quad r_g + \frac{a_g}{2} = r_o + \frac{a_o}{2} - 2U\Big|_{0}^{\infty}.$$

Gliederung

9.1 Einleitung
9.2 Konforme Abbildung
9.3 Das allgemeine Nyquist-Kriterium
- Umgang mit imaginären Polstellen

9.4 Was steckt dahinter?

9.5 Das vereinfachte Nyquist-Kriterium
- Phasenrand und Amplitudenrand
- Darstellung im Bode-Diagramm

9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums
9.7 Hausaufgaben

9.4 Was steckt dahinter?

Formal läßt sich das Nyquist-Kriterium auch über einen wichtigen Satz der Funktionalanalysis, den **Cauchy'schen Integralsatz,** und davon abgeleitet den **Residuensatz** herleiten.

*Man nennt das dahinter stehende Prinzip auch das "**Prinzip des Arguments**" oder den **Satz vom logarithmischen Residuum** (engl. "principle of the argument" oder „**Cauchy criterion**").*

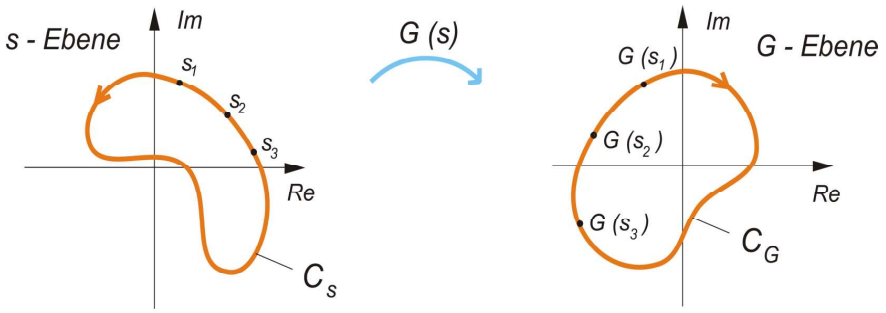
Augustin-Louis Cauchy, franz. Mathematiker
21. August 1789 in Paris; † 23. Mai 1857 in Sceaux
https://de.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy

Rationale:

- Sei $G(s)$ eine rationale Funktion in s, die bis auf isolierte Singularitäten analytisch (durch eine Potenzreihe darstellbar) auf s ist.
- Sei C_s eine geschlossene kontinuierliche Kurve in s, die gegen den Uhrzeiger-sinn durchlaufen werden soll und längs $G(s)$ analytisch ist. Da die konforme Abbildung $G(s)$ eindeutig ist, existiert zu jedem Punkt s_i ein eindeutiger Bildpunkt $G(s_i)$.
- Somit entsteht im Bildbereich wieder eine geschlossene Kurve C_G, die abhängig von der Funktion $G(s)$ im Uhrzeiger- bzw. im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

9.4 Was steckt dahinter?

Merke: der Drehsinn in der G-Ebene hängt ab von $G(s)$ und dem Drehsinn von C_s.



Satz vom logarithmischen Residuum: Die bis auf isolierte Singularitäten analytische Funktion $G(s)$ bildet eine Kurve C_s, längs derer sie analytisch ist, eindeutig in die Kurve C_G ab. Dabei umkreist C_G den Ursprung der $G(s)$ -Ebene genau so oft, wie die Differenz der von C_s eingeschlossenen Pole und Nullstellen von $G(s)$.

9.4 Satz vom logarithmischen Residuum

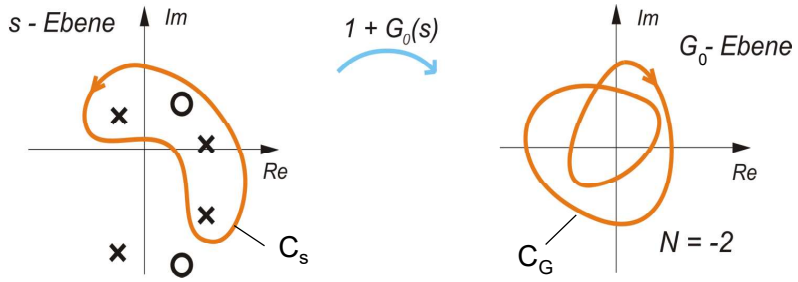
RWTH AACHEN UNIVERSITY

In Gleichungsform heißt dies: N = Z − P, wobei

- N = Anzahl der Umkreisungen des Ursprungs in der $G(s)$ -Ebene
- Z = Zahl der Nullstellen von $G(s)$ innerhalb von C_s
- P = Zahl der Polstellen von $G(s)$ innerhalb von C_s

Folgende Fälle können unterschieden werden:

1. N > 0, d. h. Z > P: Die Drehrichtung von C_s und C_G ist gleich, C_G umkreist den Ursprung N mal.
2. N = 0, d. h. Z = P: C_G umkreist den Ursprung nicht.
3. N < 0, d. h. Z < P: Die Drehrichtung von C_s und C_G ist entgegengesetzt, C_G umkreist den Ursprung N mal.



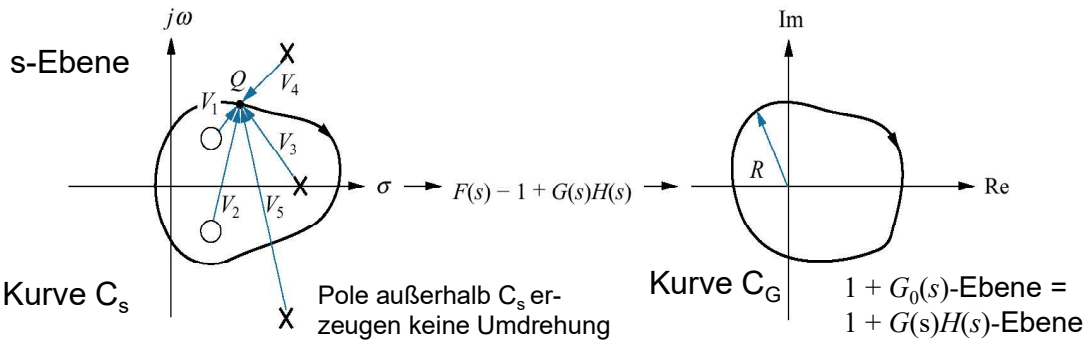
9.4 Was steckt dahinter?

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Basierend auf dem Satz vom logarithmischen Residuum etabliert das Nyquist-Kriterium für die spezielle Funktion $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ eine eindeutige Beziehung zwischen der Zahl und Lage der Pole und der Zahl und Lage der Nullstellen innerhalb der Kurve C_s und der Zahl von Umdrehungen der Kurve C_G im Bildbereich um den Ursprung.

- Dabei gilt: die Amplitude von R im Bildbereich ist gegeben durch $R = \dfrac{V_1 V_2}{V_3 V_4 V_5}$

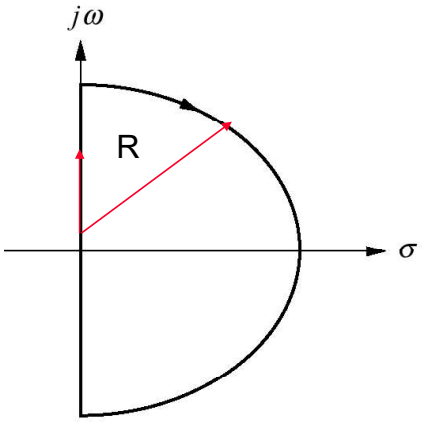
- Beachte: die Nullstellen des offenen Kreises V1 und V2 werden zu (unbekannten) Polen des geschlossenen Kreises.



9.4 Was steckt dahinter?

Anschaulich gesprochen, spiegelt sich die Pol-Nullstellen-Verteilung innerhalb der Kurve C_s im Drehverhalten der Abbildung dieser Kurve wieder.

- Wählt man jetzt die rechte Halbebene als Gebiet, das von der Kurve $s = \mathrm{j}\omega$ eingeschlossen wird (sie schließt sich mit einem Halbkreis mit $\mathrm{R} \to \infty$), und als Abbildung $1 + G_0(\mathrm{j}\omega)$, so spiegelt sich im Drehverhalten der Kurve um (0,0) die Anzahl der Nullstellen von $1 + G_0(\mathrm{j}\omega)$ (entspricht den Polen des geschlossenen Regelkreises) und die Anzahl der Pole von $1 + G_0(\mathrm{j}\omega)$ (entspricht den Polen des offenen Kreises) .



Gliederung

9.1 Einleitung
9.2 Konforme Abbildung
9.3 Das allgemeine Nyquist-Kriterium
- Umgang mit imaginären Polstellen

9.4 Was steckt dahinter?
9.5 Das vereinfachte Nyquist-Kriterium
- **Phasenrand und Amplitudenrand**
- **Darstellung im Bode-Diagramm**

9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums
9.7 Hausaufgaben

9.5 Das einfache Nyquist-Kriterium

Das einfache Nyquist-Kriterium ist eine Vereinfachung des ausführlichen Nyquist-Kriteriums für asymptotisch stabiles oder einfach grenzstabiles Verhalten des offenen Regelkreises, d. h. für

$$r_o = 0 \quad \text{und} \quad a_o \leq 2$$

mit

$$r_o = \text{Anzahl der Pole } s_{N,i} \text{ des offenen Kreises rechts von } j\omega$$
$$a_o = \text{Anzahl der Pole } s_{N,i} \text{ des offenen Kreises auf } j\omega,$$

wobei jedoch nur grenzstabile Pole in $s = 0$ zugelassen sind.

Hinweis: derartige Systeme treten in der Praxis oft auf, und oftmals reicht daher das einfache Nyquist-Kriterium zur Stabilitätsanalyse aus.

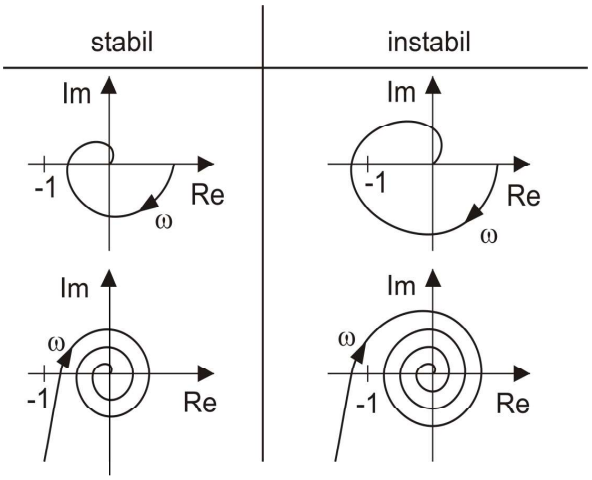
- Beispiele sind Kombinationen von PT_n-Regelstrecken und PI/PID-Reglern, sowie IT_n-Strecken und P/PD-Reglern.

9.5 Das einfache Nyquist-Kriterium II

Das einfache Nyquist-Kriterium fordert für Stabilität:

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} \angle(1 + G_0(j\,\omega)) = \begin{cases} 0 & \text{für } G_0(s) \text{ stabil} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } G_0(s) \text{ I-Verhalten} \\ \pi & \text{für } G_0(s) \text{ I}_2\text{-Verhalten} \end{cases}.$$

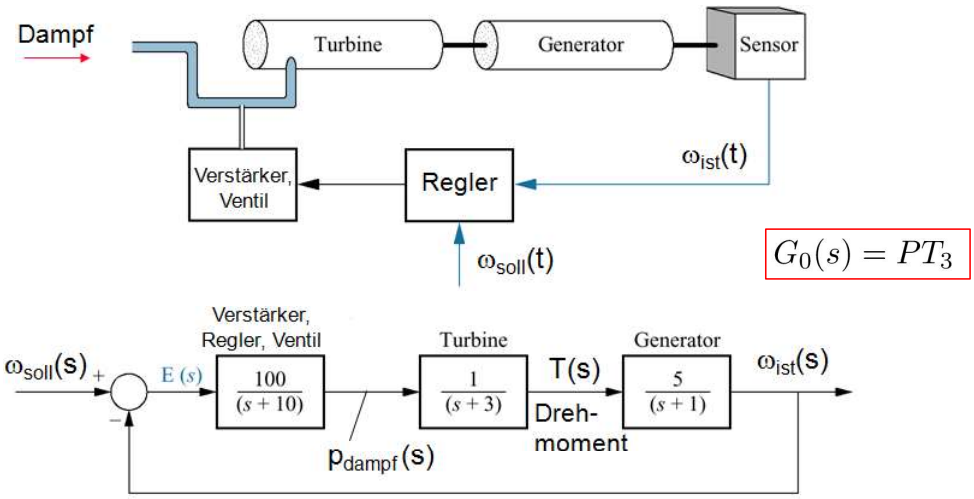
In Worten:
Ist der offene Regelkreis asymptotisch stabil, so ist der geschlossene Regelkreis genau dann asymptotisch stabil, wenn die Ortskurve des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$ den kritischen Punkt $(-1, 0)$ weder umkreist noch durchdringt.



9.5 Beispiel: Dampfturbine mit Generator I

Aufgabe:

- Gegeben ist das folgende System zur „Stromerzeugung“
- Es ist eine Dampfturbine mit Generator und Drehzahlregelung
- Skizzieren Sie die Ortskurve des offenen Regelkreises $G_0(\mathrm{j}\omega)$ und analysieren Sie die Stabilität mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums



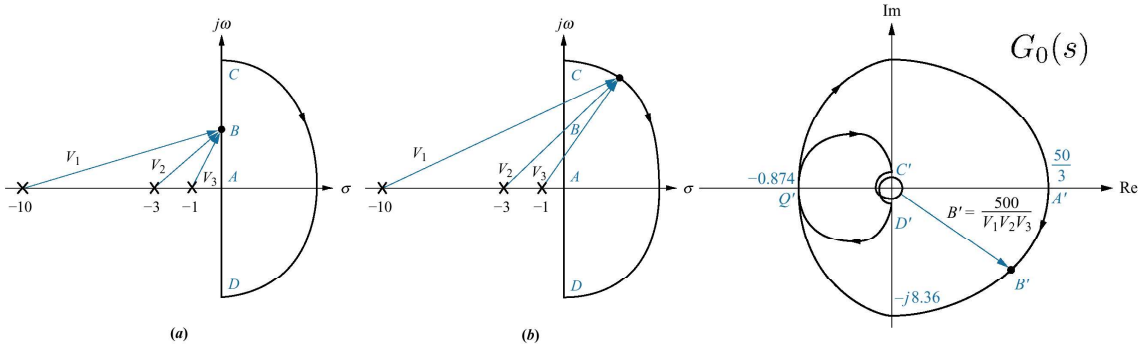
9.5 Beispiel: Dampfturbine mit Generator II

Lösung:

- Beachte: das offene System ist stabil.
- Beim Abfahren der imaginären Achse von $\omega = 0 \,..\, \infty$ (A-C) ergibt sich als Winkelbeitrag

$$\Delta_{\omega=0}^{\infty} \angle(1 + G_0(j\,\omega)) = -3 \cdot 90^\circ$$

- Während sich die Bildfunktion $G_0(j\omega)$ von A´ nach C´ bewegt, ändert sich der Betrag von 50/3 bei $\omega = 0$ (A´) auf 0 bei $\omega \to \infty$ (C´).



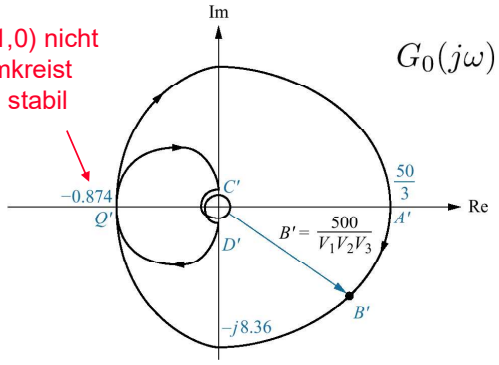
9.5 Beispiel: Dampfturbine mit Generator III

Die Abbildung $1 + G_0(j\omega)$ kann auch analytisch untersucht werden

- für $\omega = 0$ ist $G_0(j\omega) = 500/30 = 50/3$ und $\angle G_0(j0) = 0°$ → dies ist der Startpunkt.
- Während ω ansteigt, bleibt zunächst der Realanteil positiv und der Imaginäranteil negativ.
- bei $\omega = \sqrt{(30/14)}$ wird der Realteil negativ.
- bei $\omega = \sqrt{43}$ wird der Imaginärteil positiv und die Ortskurve $G_0(j\omega)$ schneidet die reelle Achse. Der zugehörige Funktionswert Q´ = - 0.874 kann durch Einsetzen von $\omega = \sqrt{43}$ in $G_0(j\omega)$ ermittelt werden.
- für $\omega \to \infty$ gilt $G_0(j\omega) \approx 500\ j/\omega^3 \approx 0$ bei einem Einfallswinkel in den Ursprung von – 270° = 90°.

$$G_0(j\omega) = \frac{500}{(s+1)(s+3)(s+10)}\bigg|_{s\to j\omega} = \frac{500}{(-14\omega^2+30)+j(43\omega-\omega^3)} = \frac{(-14\omega^2+30)-j(43\omega-\omega^3)}{(-14\omega^2+30)^2+(43\omega-\omega^3)^2}$$

(-1,0) nicht umkreist → stabil



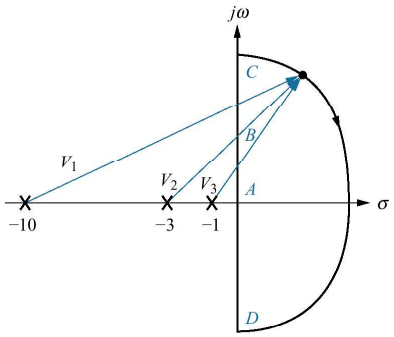
9.5 Beispiel: Dampfturbine mit Generator IV

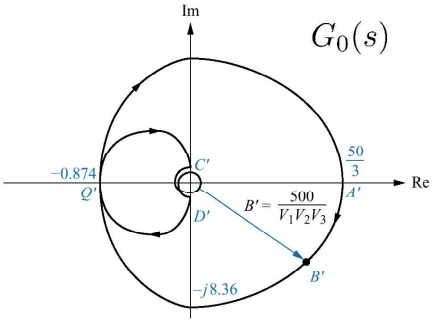
Entlang des unendlich großen Halbkreises von C nach D rotiert der Zeiger 3 x 180° im Uhrzeigersinn

- Daher rotiert $G_0(j\omega)$ 3 x 180° entgegen des Uhrzeigersinns, von C´ nach D´.
- Analytisch kann man dies einsehen, indem man den Halbkreis C-D abbildet gemäß

$$G_0(s) = \frac{500}{(R_{-1}e^{j\theta_{-1}})\,(R_{-3}e^{j\theta_{-3}})\,(R_{-10}e^{j\theta_{-10}})} \approx \frac{500}{3\infty\ \angle(\theta_{-1}+\theta_{-3}+\theta_{-10})} = 0 \times\ \angle -(\theta_{-1}+\theta_{-3}+\theta_{-10})$$

- Die negative imaginäre Achse (D-A) kann abgebildet werden, indem man die bisherige Ortskurve an der reellen Achse spiegelt.
- <u>Merke:</u> $G_0(j\omega)$ ist eine achsensymmetrische Funktion.



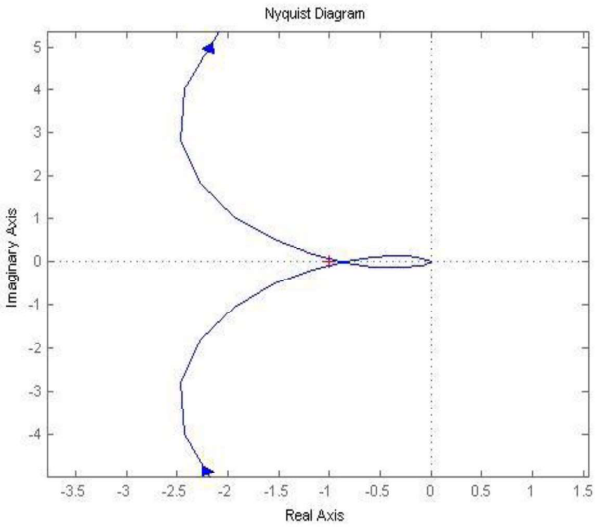


9.5 Überprüfung mit MATLAB

```
>> den = [1 14 43 30];
>> sys = tf(500,den)
>> nyquist(sys);
>> den_eq = [1 14 43 530];
>> roots(den_eq)

ans =

 -13.6874
  -0.1563 + 6.2207i
  -0.1563 - 6.2207i
```

→ stabil (aber nicht weit weg von der Stabilitätsgrenze …)

Auf der Kommandoebene tippen Sie Nyquist_1.m



Beachte: der Befehl „*nyquist*“ zeichnet die Ortskurve $G_0(j\omega)$ für $-\infty < \omega < +\infty$ …

9.5 Amplituden- und Phasenrand I

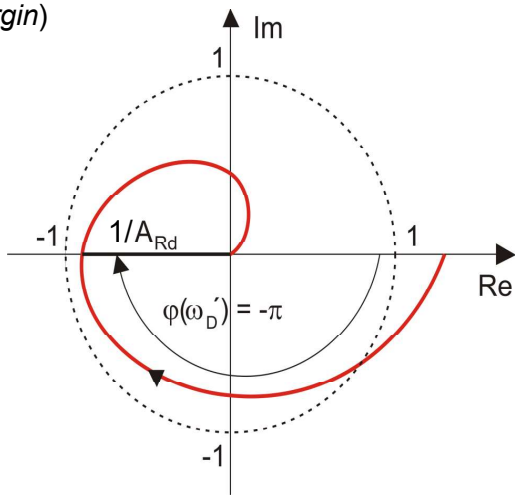
Aus dem einfachen Nyquist-Kriterium können auch Bedingungen für den sog. „Amplituden- und den Phasenrand“ als Stabilitätskriterium abgeleitet werden.

Definition:

- Der **Amplitudenrand** A_{Rd} (engl.: *gain margin*)

$$A_{Rd}: \quad \angle\{G_0(j\,\omega_D')\} = \varphi(\omega_D') = -180°$$
$$1/|G_0(j\,\omega_D')| = A_{Rd}\,.$$

lässt sich beim ersten Durchtritt der Ortskurve $G_0(j\omega_D')$ durch die negativ reelle Achse ablesen. Für **stabile Regelkreise** muss der **Amplitudenrand größer als '1'** sein.



9.5 Amplituden- und Phasenrand II

Der Phasenrand α_{Rd} wird auch „*Phasenreserve*“ genannt (engl.: *phase margin*)

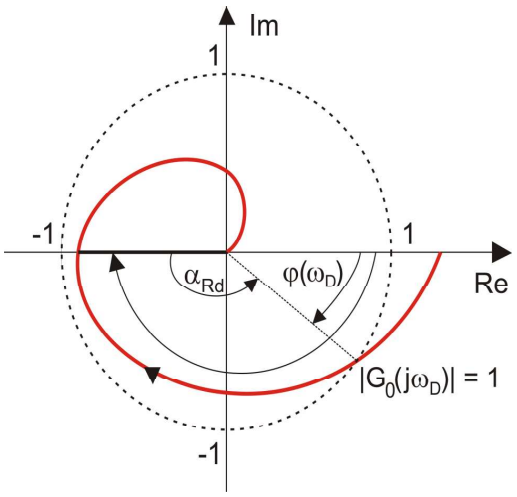
- Angenommen, die Ortskurve schneidet bei der Durchtrittsfrequenz ω_D erstmals den Einheitskreis um den Ursprung.

Definition:

- Der **Phasenrand α_{Rd}** ist im mathematisch positiven Sinn der Winkel zwischen der negativ reellen Achse und dem Zeiger $G_0(j\omega_D)$.

$$\alpha_{Rd}: \quad |G_0(j\,\omega_D)| = 1$$
$$180^\circ + \angle\{G_0(j\,\omega_D)\}$$
$$= 180^\circ + \varphi(\omega_D) = \alpha_{Rd}$$

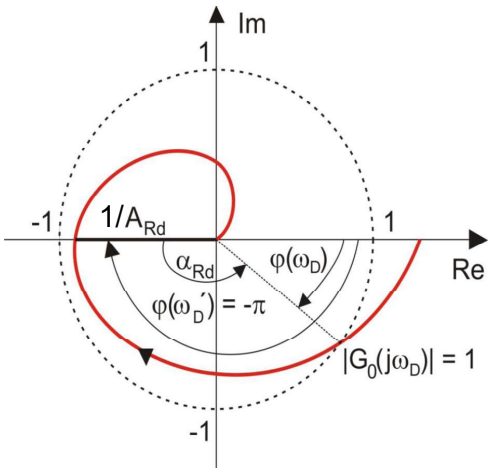
  - Bei **positivem Phasenrand** ist **der geschlossene Regelkreis stabil**.
  - Maß für den Abstand der Ortskurve $G_0(j\omega)$ vom kritischen Punkt (-1,0).



9.5 Amplituden- und Phasenrand III

Amplituden- und Phasenrand sind geeignete Kennwerte, um bei stabilem offenen Regelkreis schnell und bequem eine Stabilitätsaussage über den geschlossenen Regelkreis zu liefern.

Darüber hinaus kann man eine relative Aussage zum **Grad der Stabilität** machen, also beispielsweise, **wie weit man** mit einem spezifischen Reglerentwurf **von der Stabilitätsgrenze entfernt** ist.



9.5 Amplituden- und Phasenrand IV

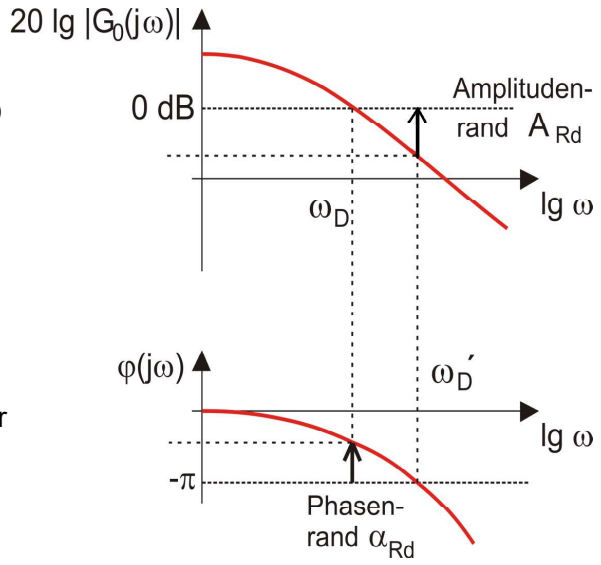
Amplituden- und Phasenrand lassen sich auch aus dem Bode-Diagramm ablesen.

a) Als Amplitudenrand A_{Rd} wird der Abstand des Frequenzgangs $G_0(j\omega_D')$ beim Phasenwinkel $\varphi(\omega_D') = -180°$ zu 0 dB bezeichnet.

- günstige Werte: 2,5 ... 10
  → 8 ... 20 dB

b) Der Phasenrand α_{Rd} ist der Abstand des Phasenganges von der -180°-Geraden bei der Durchtrittsfrequenz ω_D, d.h. beim Durchgang der Amplitudenkennlinie durch die 0-dB-Linie ($|G_0| = 1$).

- günstige Werte: 30° ... 60°



9.5 Beispiel

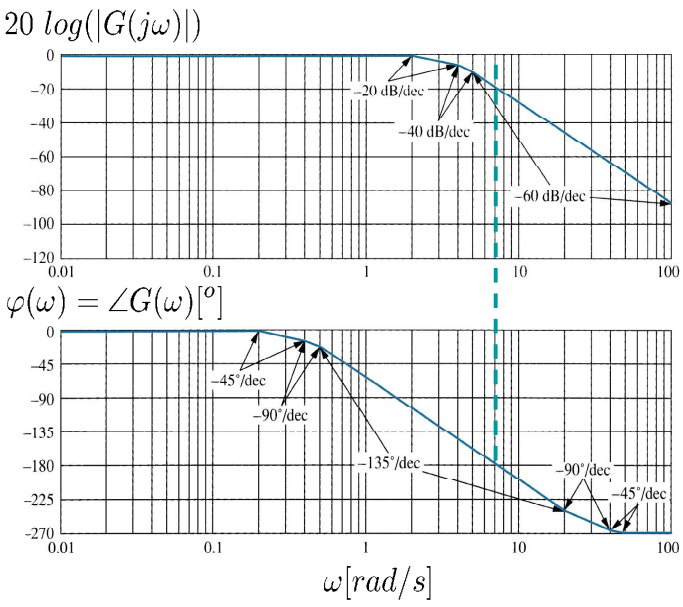
Aufgabe: gegeben ist

$$G_0(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+5)}$$

Benutzen Sie das Bode-Diagramm, um den Stabilitätsbereich für K zu bestimmen

Lösung:

- Beginne mit $K = 40$
  → $|G_0(j\omega)|_{j\omega \to 0} = 1$
- Aus dem Bode-Diagramm lesen wir ab: $\omega_D' \approx 7$ rad/s
- Amplitudenrand $A_{Rd} \approx 20$ dB (entspricht 10 x)
- Daraus folgt: $0 < K < 400$

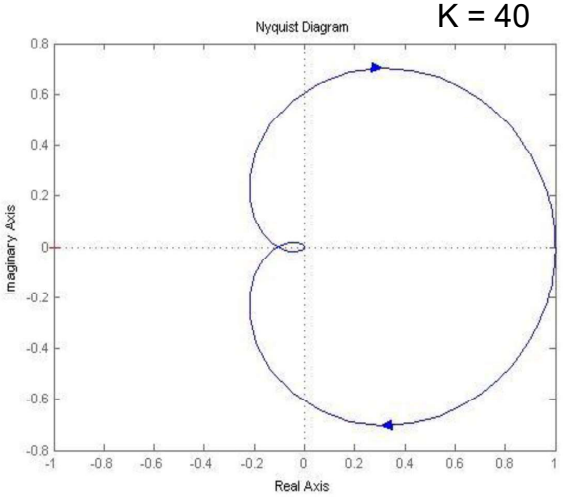


9.5 Überprüfung mit Matlab I

```
>> num=[40];
>> den = [1 11 38 40];
>> sys = tf(num,den)

Transfer function:
          40
-----------------------
s^3 + 11 s^2 + 38 s + 40

>> nyquist(sys)
```

Auf der Kommandoebene tippen Sie *Nyquist_2.m* for K = 40

K = 40

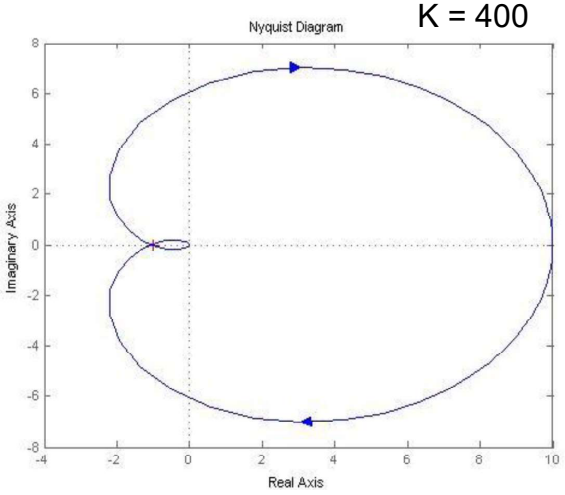


9.5 Überprüfung mit Matlab II

Auf der Kommandoebene tippen Sie *Nyquist_3.m*

für $K = 400$
→ System wird instabil

K = 400

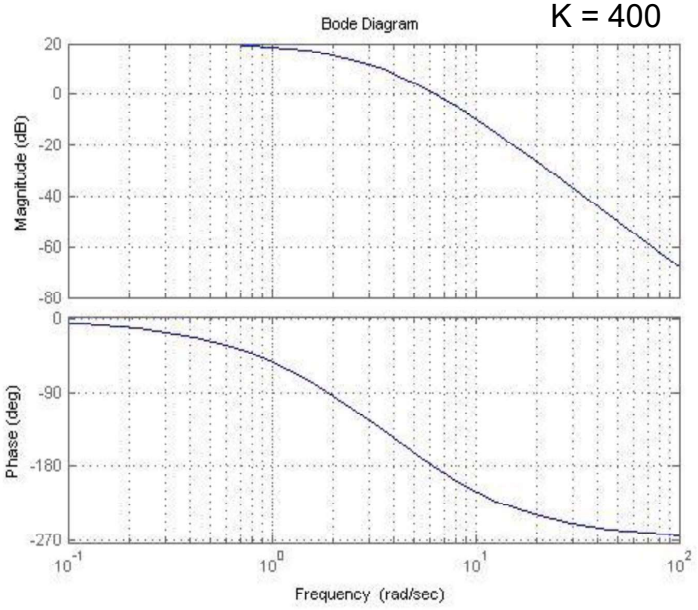


9.5 Überprüfung mit Matlab III

Auf der Kommandoebene tippen Sie
Amplitude_ Phasemargin_1.m

```
>> num=[40];
>> den = [1 11 38 40];
>> sys = tf(num,den);
>> bode(sys);
>> grid

>> pause;

>> num=[400];
>> den = [1 11 38 40];
>> sys = tf(num,den);
>> bode(sys);
>> grid
```

K = 400

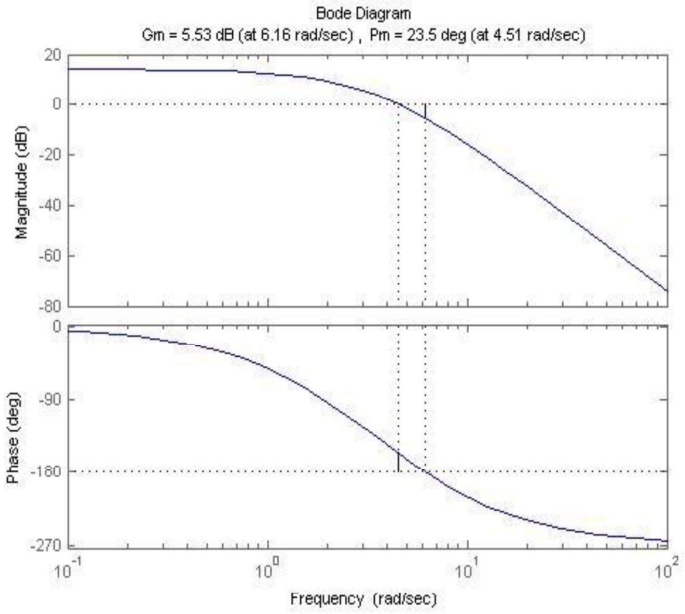


9.5 Überprüfung mit Matlab IV

Auf der Kommandoebene tippen Sie
Amplitude_ Phasemargin_2.m

or

```
>> K = 200;
>> num = [K];
>> den = [1 11 38 40];
>> margin(tf(num,den));
```



Gliederung

9.1 Einleitung
9.2 Konforme Abbildung
9.3 Das allgemeine Nyquist-Kriterium
- Umgang mit imaginären Polstellen

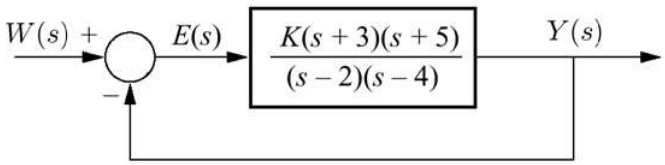
9.4 Was steckt dahinter?
9.5 Das vereinfachte Nyquist-Kriterium
- Phasenrand und Amplitudenrand
- Darstellung im Bode-Diagramm

9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums
9.6 Hausaufgaben

9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums

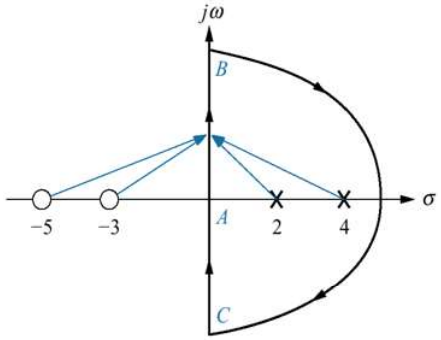
Aufgabe: Gegeben ist der folgende Regelkreis

- Für welche Verstärkung wird der Kreis instabil?



Lösung:

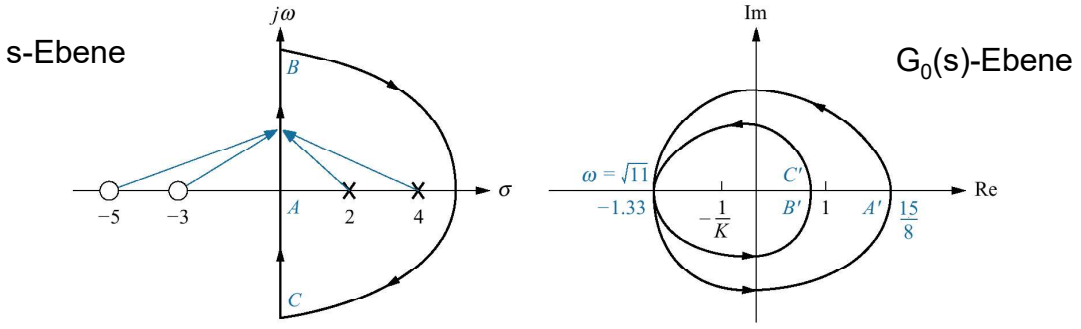
- Wir verwenden das Nyquist-Kriterium anstelle des Routh-Kriteriums …
- Beachte: Der offene Kreis hat zwei instabile Pole und 2 Nullstellen in der linken Halbebene.



9.6 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums II

Lösung:

- Wegen $r_0 = P = 2$ muss der kritische Punkt (-1,0) zweimal von der Ortskurve umfahren werden, damit das System stabil ist und $r_g = Z = 0$.
- Eine Veränderung von K schiebt die Ortskurve vor oder hinter (-1,0) …
- Sofern die Ortskurve die negativ reelle Achse bei -1 schneidet, gibt $G(j\omega) = -1$ uns die Frequenz, bei der das System grenzstabil ist.
- Aber Vorsicht: $\omega = \sqrt{11}$ stimmt zwar, aber analytisch sehr aufwendige Rechnung



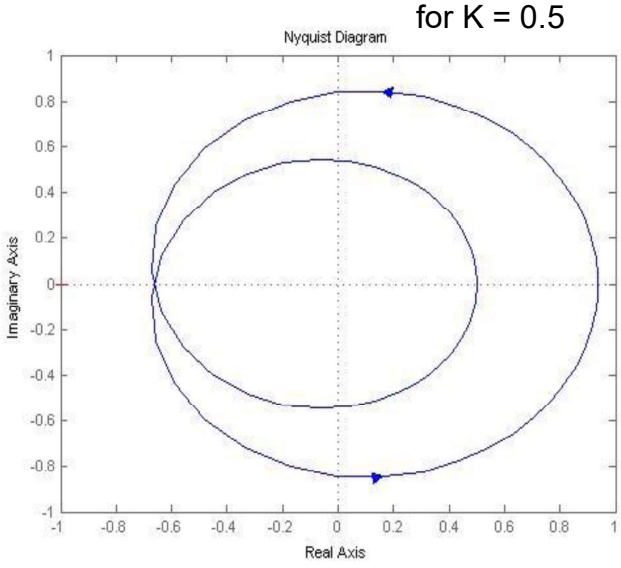
9.6 Überprüfung mit MATLAB

Tippen Sie Nyquist_4.m. Variieren Sie K …

```
>> den = [1 -6 8];
>> num=[1 8 15];
>> sys = tf(num,den)

Transfer function:
s^2 + 8 s + 15
--------------
s^2 - 6 s + 8

>> nyquist(sys)

>> num_eq = [1 8 15];
>> den_eq = [2 2 23];
>> roots(den_eq)

ans =

  -0.5000 + 3.3541i
  -0.5000 - 3.3541i
```

K = 1

for K = 0.5



Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

9.1 Einleitung
9.2 Konforme Abbildung
9.3 Das allgemeine Nyquist-Kriterium
- Umgang mit imaginären Polstellen

9.4 Was steckt dahinter?
9.5 Das vereinfachte Nyquist-Kriterium
- Phasenrand und Amplitudenrand
- Darstellung im Bode-Diagramm

9.5 Stabilitätsbereich mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums
9.7 Hausaufgaben

9.7 Zum Nachlesen

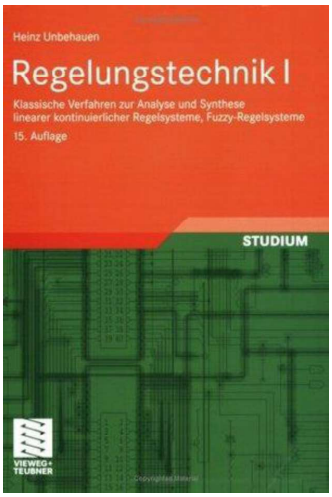
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hausaufgabe:

- Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …

Zum Weiterlesen:

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
  - Lesen Sie Kap. 6.4



Zum Üben (auf Englisch)

- http://www.engin.umich.edu/class/ctms/freq/freq.htm
- http://www.engin.umich.edu/class/ctms/freq/nyq.htm

10. Entwurf von Regelkreisen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

10.1 Einleitung

- **Problemstellung – Forderungen an den Reglerentwurf**

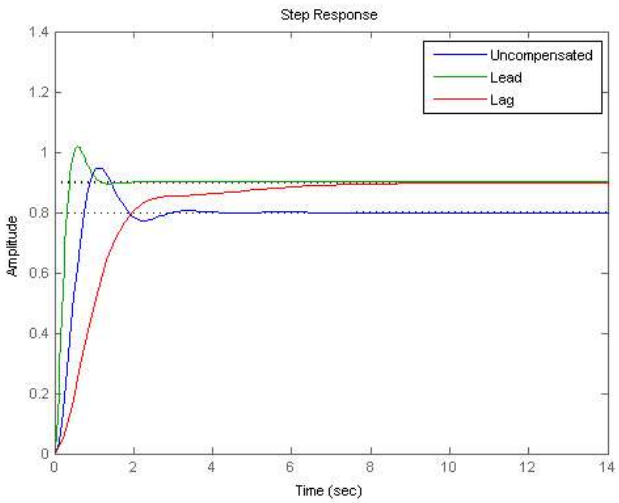
10.2 Entwurf im Zeitbereich

- Strukturstabile Regelkreise
- Stabilitätsgebiete
- Regler-Parameter-Optimierung
- Einstellregeln

10.3 Entwurf im Frequenzbereich: Frequenzkennlinienverfahren

- P-, PD-, PI-, PID-Regler und Phasenkorrekturglieder

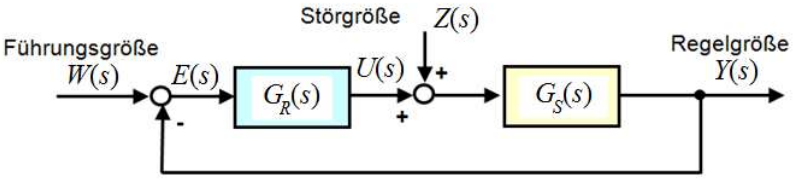
10.4 Hausaufgaben



http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeeve1/Class/e58/DL/html/lead_lag_03.png

10.1 Standardregelkreis

Gegeben ist wieder der folgende Standardregelkreis



$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} W(s) + \frac{G_S(s)}{1+G_0(s)} Z(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} W(s) - \frac{G_S(s)}{1+G_0(s)} Z(s)$$

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

10.1 Forderungen an die Regelung

Forderung 1: Stabilität des geschlossenen Regelkreises

- Überprüfung des Amplituden- und Phasenrands von $G_0(i\omega)$
- günstige Werte für **Amplitudenrand** A_{Rd}: 2,5 ... 10 → 8 dB ... 20 dB
- günstige Werte für **Phasenrand** α_{Rd}: 30° … 60°

Forderung 2: Genügende stationäre Genauigkeit → möglichst geringe oder keine bleibende Regelabweichung

- Wir erinnern uns: der stationäre Fehler ist

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \, \frac{1}{1+G_0(s)} W(s)$$

- Betrachte Sprung am Eingang: $W(s) = 1/s$

$$\rightarrow \; e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{1}{1+G_0(0)}$$

10.1 Forderung 2: stationäre Genauigkeit

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Stationärer Fehler bei Sprung der Führungsgröße

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \, \frac{1}{1+G_0(s)} W(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{s}{s} = \frac{1}{1+G_0(0)}$$

– Verringerung des stationären Fehlers:

$$G_0(0) \uparrow \;\Leftrightarrow\; e(\infty) \downarrow \;\Rightarrow\; |G_0(0)| >> 1$$

Annahme: sei $G_0(s)$ ein allgemeines $PI_ND_MT_Q$-Glied.

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s^N} \, \frac{\prod^M (1+s\tau_m)}{\prod^Q (1+sT_q)} \; ; \; M \le N+Q, \; K_0 > 0$$

Dann ist der stationäre Fehler: $e(\infty) = \dfrac{1}{1+K_0} \; ; \; N = 0$ → Ohne I-Verhalten: Wähle K_0 >> 0

mit I-Verhalten:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{K_0}{s} \, \dfrac{\prod^M (1+s\tau_m)}{\prod^Q (1+sT_q)}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{K_0}{s}} = 0 \; ; \; N = 1$$

10.1 Stationärer Fehler für verschiedene Testsignale und Systemtypen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

I-Anteil

Systemtyp N =	Stationärer Fehler e(∞) für $W(s) = A/s$	$W(s) = B/s^2$	$W(s) = C/s^3$
0	$\dfrac{A}{1+K_0}$	∞	∞
1	0	$\dfrac{B}{K_0}$	∞
2	0	0	$\dfrac{C}{K_0}$

10.1 Veränderungen des Verstärkungsfaktors

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben

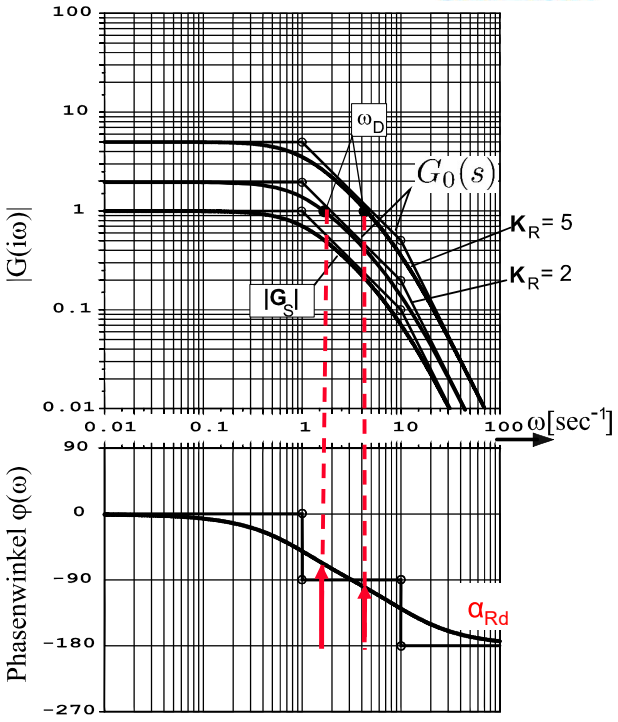
$$G_R(j\omega) = K_R \quad \text{P-Regler}$$

$$G_S(j\omega) = \frac{K_S}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)}$$

mit $K_S = 1$, $T_1 = 1$ sec, $T_2 = 0{,}1$ sec.

Eine Vergrößerung des Verstärkungsfaktors K_R: 2 → 5

- vergrößert die Durchtrittsfrequenz ω_D (1,7 sec^{-1} → 4,5 sec^{-1})
- verkleinert den Phasenrand α_{Rd} (Stabilitätsreserve) (110° → 80°)
- vergrößert die Kreisverstärkung $K_0 = K_R K_S$ (2 → 5) → Addition der Asymptotenverläufe
- beeinflusst Phasenwinkel $\varphi_0(\omega)$ nicht



10.1 Bode-Diagramm für PT_3 mit P-Regler

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel:

- Gegeben ist $G_R(s) = K$, und

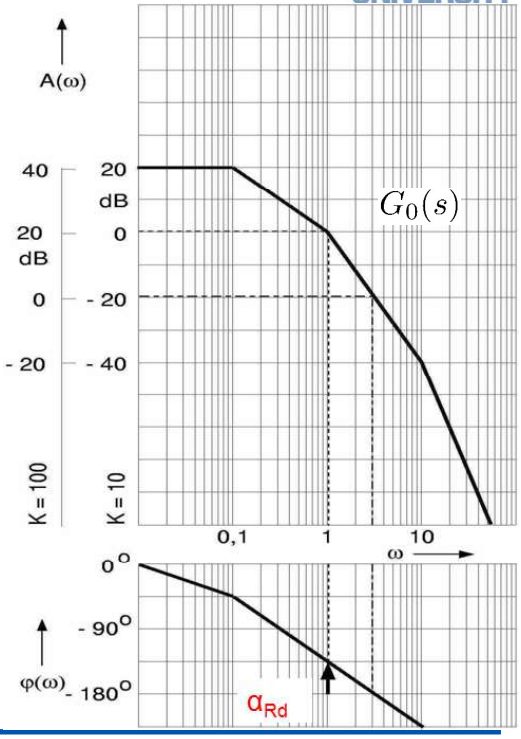
$$G_S(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+s)(1+0{,}1s)}$$

- Betrachte:

$$K = \begin{cases} 10 & (20\ \text{dB}) \\ 100 & (40\ \text{dB}) \end{cases} \text{ grenzstabil!}$$

Problem:

- hohes K reduziert Phasenrand α_{Rd}



10.1 Bode-Diagramm für PT_3 mit I-Regler

RWTH AACHEN UNIVERSITY

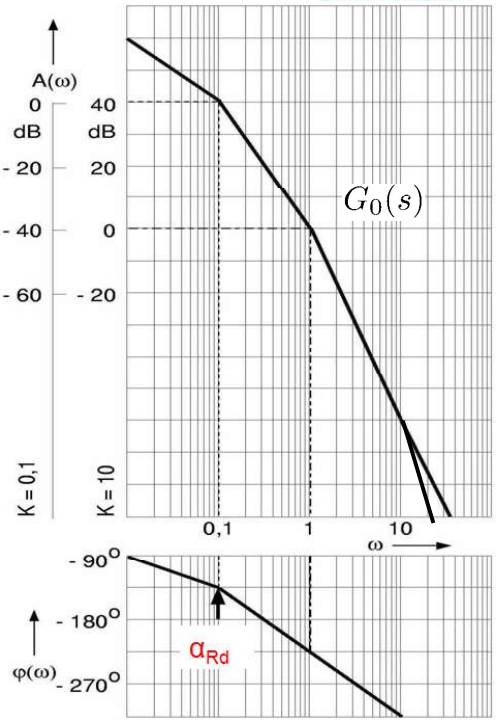
Beispiel:

- Gegeben ist nun $G_R(s) = \frac{K}{s}$ und

$$G_S(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+s)(1+0,1s)}$$

- Betrachte

$$K = \begin{cases} 10 & (20\ \text{dB}) \quad \text{instabil!} \\ 0,1 & (-20\ \text{dB}) \quad \text{stabil!} \end{cases}$$



Problem:

- I-Anteil erzwingt e(∞) = 0, reduziert aber die Phase um -90°

Beobachtung: bei Einsatz eines I-Reglers wird der geschlossene Regelkreis bei einem kleineren K (hier ca. 1) instabil als bei Regelung mit einem P-Regler (K = 100)!

10.1 Forderungen an die Regelung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Forderung 1: Stabilität

- Überprüfung des Amplituden- und Phasenrands von $G_0(i\omega)$

Forderung 2: Genügende stationäre Genauigkeit

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sW(s)\frac{1}{1+G_0(s)}$$

- Stationärer Fehler

- Testsignal Sprung: $W(s) = 1/s, \quad \rightarrow \; e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{1}{1+G_0(0)}$

Forderung 3: Genügendes dynamisches Verhalten

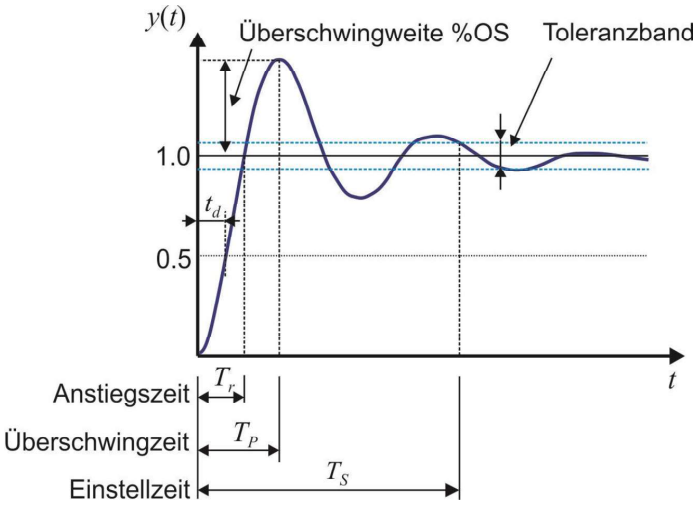
- $G_{ges}(j\omega)$: Überschwingen (D, %OS), Einstellzeit (T_S)

$\leftrightarrow$ $G_0(j\omega)$: Phasenrand α_{Rd} (D ≈ 0,01 α_{Rd}), Durchtrittsfrequenz ω_D

(Kommt später)

10.1 Approximation eines Regelkreises durch ein PT_2-Glied

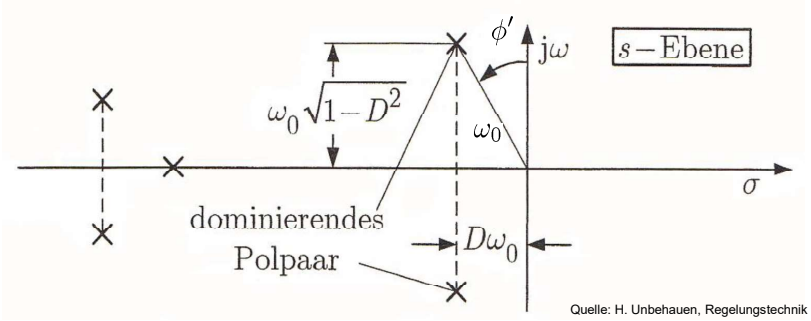
Erinnern wir uns an ein System zweiter Ordnung (vgl. Kapitel 5)



10.1 Approximation eines Regelkreises durch ein PT_2-Glied II

Es soll nun angenommen werden, dass der geschlossene Regelkreis sich durch ein schwingfähiges PT_2-Glied approximieren lässt.

- Wir beachten, dass ein PT_2-Glied vollständig durch die Eigenfrequenz ω_0 und die Dämpfung D charakterisiert wird.
- Eine solche Approximation ist dann mit guter Näherung möglich, wenn der geschlossene Regelkreis ein dominierendes Polpaar besitzt

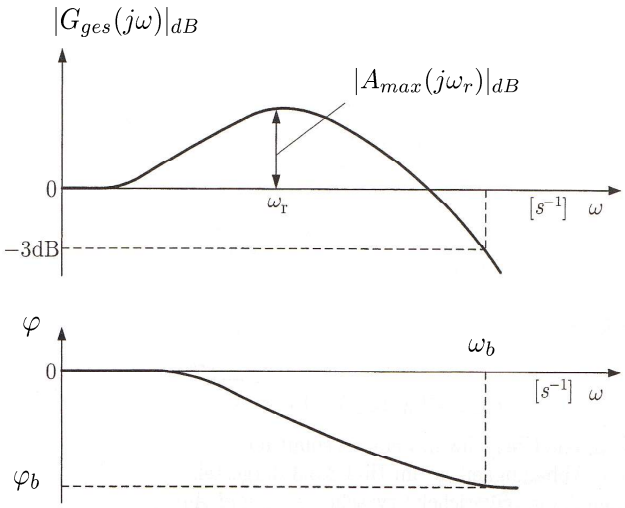


Quelle: H. Unbehauen, Regelungstechnik I, Bild 8.3.2, p. 211.

10.1 Approximation eines Regelkreises durch ein PT$_2$-Glied III

Ein geschlossener Regelkreis, der in etwa eine solche Übergangsfunktion aufweist, besitzt gewöhnlich einen Frequenzgang mit einer Amplitudenüberhöhung und einem darauf folgenden Abfall.

$$G_{ges}(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \stackrel{!}{=} \frac{\omega_0^2}{s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2}$$



Quelle: H. Unbehauen, Regelungstechnik I, Bild 8.3.1, p. 211.

Frage: Wie bestimmt man

- die Resonanzfrequenz ω_r ?
- die Amplitudenüberhöhung $|A_{max}(j\omega_r)|_{dB}$
- die Bandbreite ω_b ?

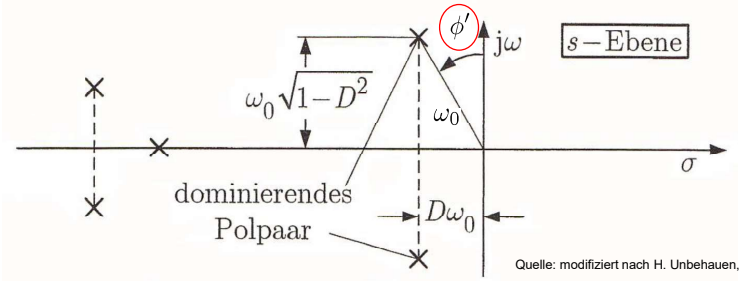
10.1 Approximation eines Regelkreises durch ein PT$_2$-Glied IV

Wir erinnern uns: die Übergangsfunktion (vgl. Kapitel 5) lautet

$$y(t) = h_{ges}(t) = 1 - e^{-D\omega_0 t}\left(cos(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cdot sin(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t)\right)$$
$$= 1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \cdot cos(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t - \phi') \quad \text{mit} \quad \phi' = sin^{-1}\left(\frac{D\omega_0}{\omega_0}\right) = sin^{-1}(D)$$

und die Gewichtsfunktion ist gegeben durch

$$g(t) = \dot{h}_{ges}(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-D\omega_0 t} \cdot sin(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t)$$



Quelle: modifiziert nach H. Unbehauen, Regelungstechnik I, Bild 8.3.2, p. 211.

10.1 Bestimmung der Amplitudenüberhöhung I

Aus Kapitel 5 wissen wir, dass ein schwingfähiges PT_2-Glied folgenden Amplitudengang $A(\omega)$ besitzt:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2D\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

$$\Rightarrow\ G(j\omega) = \frac{K}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2jD\frac{\omega}{\omega_0}} = \underbrace{\frac{K}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2D\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}}_{=A(\omega)} \cdot \exp j \underbrace{\left(-tan^{-1}\frac{2D\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)}_{=\varphi(\omega)}$$

$$\Rightarrow\quad A(\omega)_{dB} = 20\ lg(K/\omega_0^2) - 20\ lg\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2D\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}$$

10.1 Bestimmung der Amplitudenüberhöhung II

Aus

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2D\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}} = \frac{K}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{N(\omega)}$$

wird ersichtlich, dass

$$A(\omega)_{max} = A(\omega_r) \quad \Rightarrow \quad N^2(\omega) = \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2D\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2 = min.$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dN(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_r} = 2 \cdot \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] \cdot \left(-2\frac{\omega}{\omega_0^2}\right) + 2 \cdot \left[2D\frac{\omega}{\omega_0}\right] \cdot \frac{2D}{\omega_0} = 0$$

$$= -\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] + 2D^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2D^2} \quad \text{und} \quad A_{max}(\omega) = A(\omega_r) = \frac{K}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{2D\sqrt{1 - 2D^2}}$$

Beachte: Eine Amplitudenüberhöhung existiert somit nur für 0 < D < 1/√2 = 0,707

10.1 Bandbreite eines Übertragungsgliedes

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Verzögerungsglieder mit Proportionalverhalten (PT_1-, PT_2- oder PT_n- Glieder) besitzen insgesamt Tiefpasseigenschaften

- Sie übertragen vorzugsweise tiefe Frequenzen, während hohe Frequenzen entsprechend dem stark abfallenden Amplitudengang abgeschwächt übertragen werden
- Als Bandbreite ω_b bezeichnet man die Frequenz ω_b, bei der der Amplitudengang auf – 3 dB abgefallen ist und diesen Wert nicht mehr übersteigt.

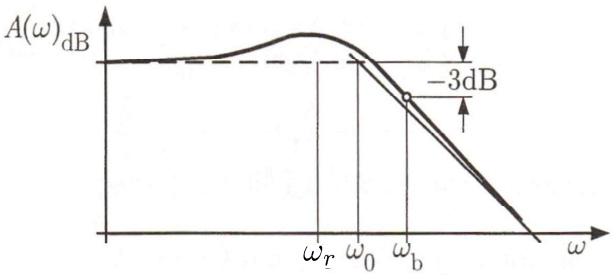
Beachte: bei einem PT_2- Glied gilt:

Zur Erinnerung
$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$

$$\omega_r < \omega_0 < \omega_b$$

Resonanzfrequenz — Eigenfrequenz — Bandbreite

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2D^2}$$



Quelle: H. Unbehauen, Regelungstechnik I, Bild 4.3.18, p. 106.

10.1 Offener und geschlossener Regelkreis I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Frage: Kann man die Stabilitätseigenschaften aus der Nyquist-Analyse zum Entwurf eines Regelkreises nutzen?

Sei weiterhin K = 1 und $G_{ges}(s) = \dfrac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \dfrac{\omega_0^2}{s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2}$

Wir fragen uns: gibt es einen **Zusammenhang zwischen Phasenrand α_{Rd} und der Dämpfung D**, den man zur Reglerauslegung nutzen kann?

Lösung: $$G_0(s) = \frac{G_{ges}(s)}{1-G_{ges}(s)} = \frac{\omega_0^2}{s\cdot(s+2D\omega_0)} = \frac{K_0}{s}\cdot\frac{1}{1+Ts}$$

An der Durchtrittsfrequenz ist

$$|G_0(j\omega_D)| = \left|\frac{\omega_0^2}{j\omega_D\cdot(j\omega_D+2D\omega_0)}\right| = 1.$$

Nach kurzer Zwischenrechnung kann man zeigen, dass

$$\frac{\omega_D}{\omega_0} = \sqrt{\sqrt{4D^4+1}-2D^2}.$$

10.1 Offener und geschlossener Regelkreis II

Wird weiterhin gefordert, dass $\omega_D < 1/T = 2\,D\,\omega_0$, so ergibt sich

$$\sqrt{\sqrt{4D^4+1}-2D^2} < 2D \quad \Rightarrow \quad D > 0,42$$

Das bedeutet, für D > 0,42 verläuft der Amplitudengang im Bereich der Durchtrittsfrequenz ω_D mit – 20 dB/Dekade und erst ab $\omega > 1/T$ mit – 40 dB/Dekade.

$$|G_0(j\omega)| = \left| \frac{\omega_0^2}{j\omega \cdot (j\omega + 2D\omega_0)} \right|$$

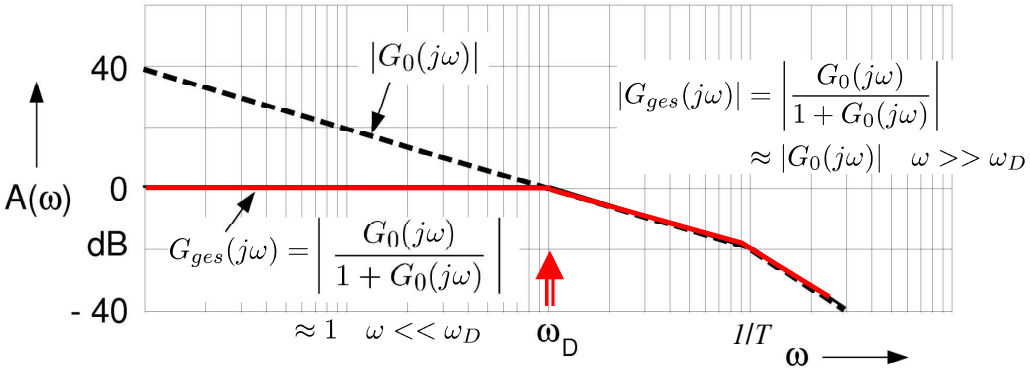
Gleichzeitig ist bei gegebenem

$$|G_{ges}(j\omega)| = \left| \frac{G_0(j\omega)}{1+G_0(j\omega)} \right| \approx 1 \quad \omega << \omega_D$$

$$|G_{ges}(j\omega)| = \left| \frac{G_0(j\omega)}{1+G_0(j\omega)} \right| \approx |G_0(j\omega)| \quad \omega >> \omega_D$$

10.1 Amplitudengang des geschlossenen Regelkreises

Approximation des Amplitudengangs $G_{ges}(j\omega)$



Approximation der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises im Bereich der Durchtrittsfrequenz ω_D

$$G_{ges}(s) = \frac{1}{1+s/\omega_D} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \simeq e^{-\omega_D t}$$

Die Durchtrittsfrequenz entspricht der dominanten Systemzeitkonstanten → enge Beziehung zur Schnelligkeit des Systems

10.1 Offener und geschlossener Regelkreis III

Über $|G_0(j\omega)| = \left|\frac{\omega_0^2}{j\omega \cdot (j\omega + 2D\omega_0)}\right|$ und die Berechnung von ω_D lässt sich nun die Phase bestimmen zu

$$\varphi(\omega_D) = \frac{\pi}{2} \quad tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{2D\omega_0}\right) = \frac{\pi}{2} \quad tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{4D^4+1}-2D^2}}{2D}\right)$$

Wegen $\alpha_{Rd} = 180° + \varphi(\omega_D)$ (vgl. Kapitel 9) ergibt sich für den Phasenrand

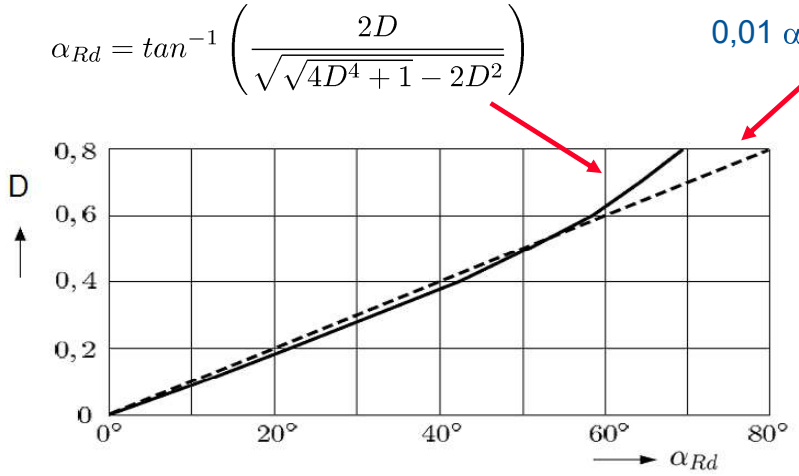
$$\alpha_{Rd} = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{4D^4+1}-2D^2}}{2D}\right)$$

Mit $tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{tan\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{Rd} = tan^{-1}\left(\frac{2D}{\sqrt{\sqrt{4D^4+1}-2D^2}}\right)$

10.1 Phasenrand α_{Rd} und Dämpfungsgrad D

ergibt sich

$$\alpha_{Rd} = tan^{-1}\left(\frac{2D}{\sqrt{\sqrt{4D^4+1}-2D^2}}\right)$$



⇨ D ≈ 0,01 α_{Rd} / Grad für $0 \le \alpha_{Rd} < 70^0$

10.1 Fazit: Forderungen an die Regelung

Forderung 1: Stabilität

- Überprüfung des Amplituden- und Phasenrands von $G_0(j\omega)$

Forderung 2: Genügende stationäre Genauigkeit

- Stationärer Fehler $e(\infty) = \lim_{s\to 0} sW(s)\frac{1}{1+G_0(s)}$
- Testsignal Sprung: $W(s) = 1/s$,

$$\rightarrow \; e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{1}{1+G_0(0)}$$

Forderung 3: Genügendes dynamisches Verhalten

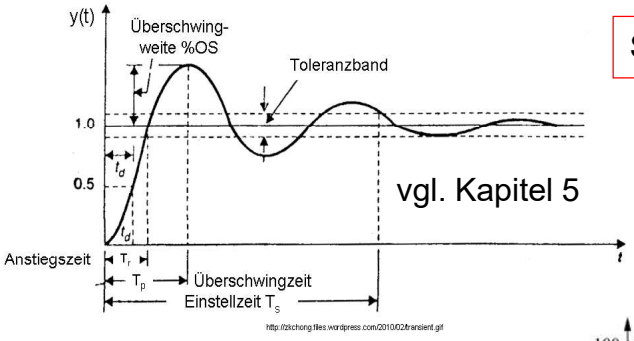
- $G_{ges}(j\omega)$: Überschwingen (D, %OS), Einstellzeit

$$T_{s,\ 0{,}02} = \frac{-ln\left(0{,}02\sqrt{1-D^2}\right)}{D\omega_0} \approx \frac{4}{D\omega_0}$$

$\leftrightarrow$ $G_0(j\omega)$: Phasenrand α_{Rd} ($D \approx 0{,}01\ \alpha_{Rd}$), Durchtrittsfrequenz ω_D

Dimensionierung der Regelung kann anhand von $G_0(j\omega)$ durchgeführt werden !

10.1 System 2. Ordnung



Schnelligkeit des Systems $\Leftarrow \omega_D$

vgl. Kapitel 5

$$\frac{\omega_D}{\omega_0} = \sqrt{\sqrt{4D^4+1} - 2D^2}$$

$$T_{s,\ 0{,}02} \approx \frac{4}{D\omega_0} \text{ und } T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}}$$

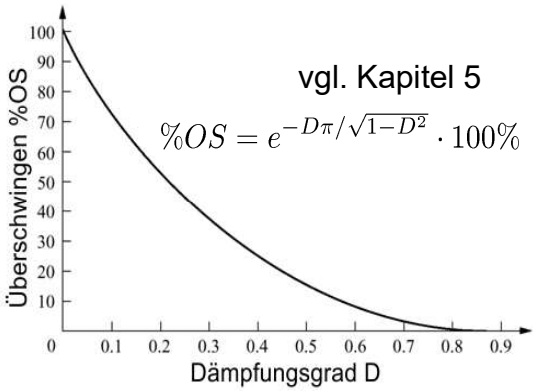
α_{Rd}

$\Downarrow$

$D \approx 0{,}01\alpha_{Rd}$

$\Downarrow$

%OS



vgl. Kapitel 5

$$\%OS = e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}} \cdot 100\%$$

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

10.1 Einleitung
- Problemstellung – Forderungen an den Reglerentwurf

10.2 Entwurf im Zeitbereich
- **Strukturstabile Regelkreise**
- **Stabilitätsgebiete**
- **Regler-Parameter-Optimierung**
- **Einstellregeln**

10.3 Entwurf im Frequenzbereich: Frequenzkennlinienverfahren
- P-, PD-, PI-, PID-Regler und Phasenkorrekturglieder

10.4 Hausaufgaben

10.2 Entwurf im Zeitbereich

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Welche Reglertypen müssen gewählt werden?

a) Regelkreis muss stabilisierbar sein

b) Regelgüteanforderungen müssen erfüllt sein

<table>
<tr><td colspan="3">Lineare Regler</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parameteroptimierter Regler
(P-, PI-, PID-Regler)</td><td colspan="2">Strukturoptimale Regler</td></tr>
<tr><td>Kompensations-Regler</td><td>Zustandsregler (siehe System-theorie II)</td></tr>
</table>

2. Wie müssen die Reglerparameter eingestellt werden?
- Strukturstabile Regelkreise
- Stabilitätsgebiete
- Regelgütekriterien
- Einstellregeln

10.2 Strukturstabile Regelkreise I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel:

- gegeben sei

$$G_S(s) = \frac{K_S}{1+T_1 s} \qquad \text{und} \qquad G_R(s) = K_R\left(1+\frac{1}{T_I s}\right) = \frac{K_R}{T_I s}\cdot(T_I s+1)$$

PT$_1$ PI

- Charakteristische Gleichung: $1 + G_0(s) = 0$

$$\rightarrow\ 1 + K_R K_S \frac{1}{(1+T_1 s)}\cdot\frac{1}{T_I s}\cdot(T_I s+1) = 0,$$

sei nun: $K_0 = K_R K_S$

$$\rightarrow\ \underbrace{T_1 T_I}_{a_2} s^2 + \underbrace{(1+K_0)T_I}_{a_1} s + \underbrace{K_0}_{a_0} = 0,$$

10.2 Strukturstabile Regelkreise II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hurwitz-Stabilitätskriterium:

a) Nicht monoton instabil: $a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0,$

b) Nicht oszillatorisch instabil:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0$$

$$D_1 = a_1 > 0$$

- Hieraus folgt:

$a_0 > 0:\ K_0 > 0$ und $a_2 > 0:\ T_I > 0$

$a_1 = (1+K_0)T_I > 0\ \rightarrow\ T_I > 0$ und $1 + K_0 > 0\ \rightarrow\ K_0 > -1$

mit $K_0 = K_R K_S$

resultierende Stabilitätsbedingungen:

$0 \le K_0 \le \infty$ und $0 \le T_I \le \infty$ immer stabil!

10.2 Strukturstabile Regelkreise III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition:

- Ein Regelkreis ist **strukturstabil**, wenn die charakteristische Gleichung $\leq$ 2. Ordnung ist und alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben.

- Dies ist der Fall u.a. für folgende Kombinationen:

Regelstrecke	Regler
P	P, I, PI
PT_1	P, I, PI
PT_2	P
I	P, PI
IT_1	P
I_2	PD

- Merke: bei allen anderen Kombinationen von Reglern und Regelstrecken muss man die Stabilität im Einzelnen prüfen!

10.2 Strukturstabile Regelkreise IV

RWTH AACHEN UNIVERSITY

a) I-Regelstrecke mit I-Regler

- Grenzstabil $1 + G_0(s) = 1 + \frac{1}{T_1 s}\frac{1}{T_I s} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 T_I s^2 + 0s + 1 = 0$

$$s_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{1}{T_1 T_I}}$$ grenzstabiles Verhalten

b) I_2-Regelstrecke mit P-Regler

- Beispiele: Hubschrauber im Schwebeflug (näherungsweise) oder inverses Pendel
- grenzstabil

$$G_S(s) = \frac{1}{T_1^2 s^2}$$

$$G_R(s) = K_R \quad \rightarrow \quad 1 + G_0(s) = 1 + \frac{K_R}{T_1^2 s^2} = 0$$

$$T_1^2 s^2 + 0s + K_R = 0 \quad \Rightarrow \text{ grenzstabiles Verhalten}$$

c) I_2-Regelstrecke mit PD-Regler

- Beispiel: Inverses Pendel
- Stabil: der D-Anteil des Reglers erzeugt eine Dämpfung und stabilisiert den Regelkreis.

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{1}{T_1 s^2} K_R (1 + T_D s) = 0$$

$$T_1 s^2 + K_R T_D s + K_R = 0$$

$$\rightarrow \; K_R T_D > 0 \quad \rightarrow \quad K_R > 0 \quad \text{und} \quad T_D > 0$$

10.2 Stabilitätsgebiete I

Um die Stabilitätsgebiete der Reglerparameter zu bestimmen, geht man wie folgt vor:

a) Prüfung auf monotone Instabilität (alle Koeffizienten > 0)

b) Prüfung auf oszillatorische Instabilität und Berechnen der Stabilitätsgrenze

Betrachte folgendes Beispiel: PT_3-Regelstrecke mit P-Regler:

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{K_R K_S}{(1+Ts)^3} = 0 = 1 + 3Ts + 3T^2 s^2 + T^3 s^3 + K_0$$

$$s = i\omega_{krit} = i\omega \;\rightarrow\; (1 + K_0 - 3T^2\omega^2) + i\omega(3T - T^3\omega^2) = 0$$

$$\Im\mathrm{m}(1+G_0(s)) = 0 \;\rightarrow\; T\omega(3 - T^2\omega^2) = 0 \;\rightarrow\; \omega_{krit}^2 = \frac{3}{T^2} \;\rightarrow\; \omega_{krit} = \frac{\sqrt{3}}{T}$$

$$\Re\mathrm{e}(1+G_0(s)) = 0 \;\rightarrow\; 1 + K_0 - 3T^2\omega^2 = 0 \;\rightarrow\; 1 + K_o - 3T^2\frac{3}{T^2} = K_0 - 8 = 0$$

$$\rightarrow\; K_{krit} = 8$$

Auf diese Weise lassen sich für viele Regler-Strecken-Kombinationen Bedingungen für Stabilität angeben!

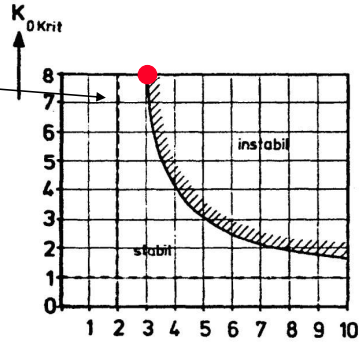
10.2 Stabilitätsgebiete II

Stabilitätsgebiete für PT_n-Regelstrecken mit P-Reglern über der Modellordnung n

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(1+Ts)^n},\; G_R(s) = K_R$$

mit

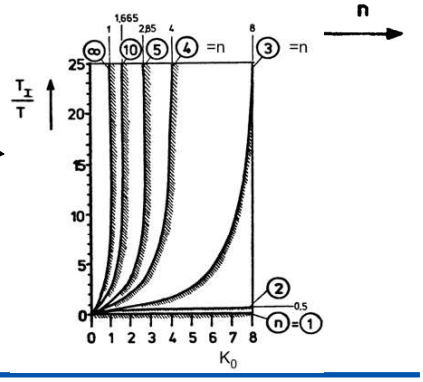
$$K_0 = K_R K_S$$



Stabilitätsgebiete für PT_nRegelstrecken mit PI-Reglern:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(1+Ts)^n}$$

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$



10.2 Stabilitätsgebiete III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

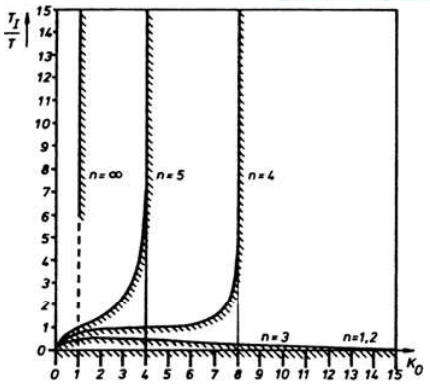
- Stabilitätsgebiete für PT_nRegelstrecken mit PID-Reglern

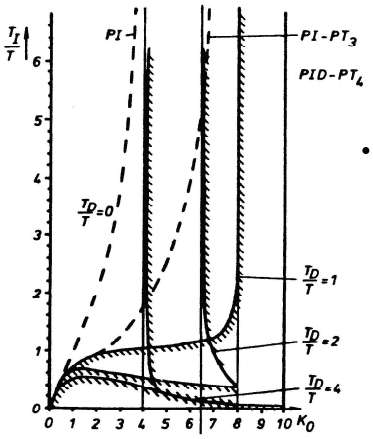
$$G_S(s) = \frac{K_S}{(1+Ts)^n}$$

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

mit

$$\frac{T_D}{T} = 1$$





- Stabilitätsgebiete für eine PT_4Regelstrecke mit PID-Reglern
  - Der zusätzliche D-Anteil vergrößert das Stabilitätsgebiet und erlaubt deshalb größere Kreisverstärkungen K_0.

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(1+Ts)^4}$$

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) \text{ mit } \frac{T_D}{T} = 0\ldots4$$

10.2 Regler-Parameter-Optimierung I

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Aufgabe:

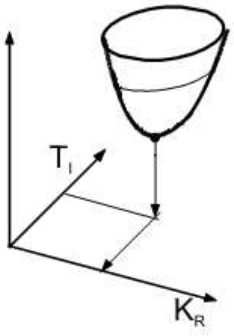
- Gegeben ist ein Regelgütekriterium.
- Je größer der Gewichtungsfaktor *r*, desto größeres Gewicht haben Stellgrößenänderungen und desto größer ist die Dämpfung …

$$V = \int_{0_-}^{\infty} [e^2(t) + r\Delta u^2(t)]\,\mathrm{d}t$$

Gesucht sind die optimalen Reglerparameter eines PI-Reglers für sprungförmige Änderung $w(t) = \sigma(t)$, so dass $V(K_R, T_I) = V_{min}$

PI-Regler:

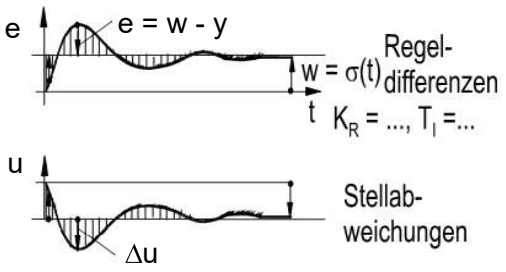
$$y(t) = K_R\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t\right)$$

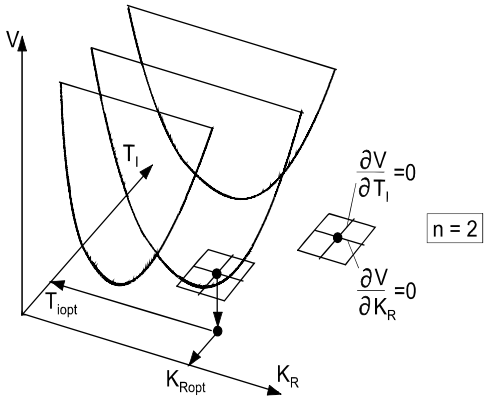


10.2 Regler-Parameter-Optimierung II

Lösungsweg: Suche des Minimums von $V(K_R,T_I)$ mit numerischen Optimierungsverfahren (Hill-Climbing-, Gradientenverfahren)

• Hierzu Simulation des Regelverhaltens





Numerische Suche des Minimums:

- Entsprechende Erweiterung auf n = 3 und n ≥ 3 : → Mehrdimensionale Optimierung (Hyperflächen)

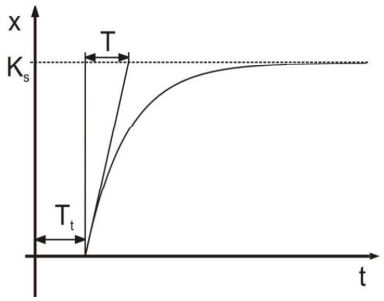
Eigenschaften:

• genau	+
• sehr allgemein einsetzbar	+
• sehr rechenaufwendig	-
• genaues Regelstreckenmodell	-

10.2 Einstellregeln für Reglerparameter

Verfahren nach Ziegler-Nichols (1942):

- Voraussetzung: insgesamt verzögerndes Streckenverhalten
- Approximation der Regelstrecke $G_S(s)$ durch ein Totzeitglied und ein Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT_1T_t).
  - für viele industrielle Regelstrecken ausreichend, aber letztlich nur eine grobe Näherung.



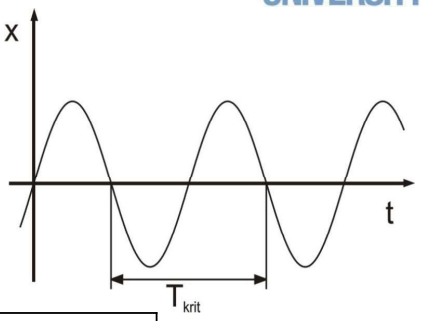
- Alternativ wird der Regelkreis mit einem P-Regler durch Vergrößern des Verstärkungsfaktors an die Stabilitätsgrenze gebracht (Schwingversuch).

10.2 Einstellregeln nach Ziegler-Nichols

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Schwingversuch:

- Regelkreis mit P-Regler schliessen und die Verstärkung solange erhöhen, bis der Ausgang des Regelkreises bei konstantem Eingang eine *Dauerschwingung* mit der Periode T_{krit} bei der Reglerverstärkung $K_{p,krit}$ ausführt.
- Der resultierende Regler kann ein P-, PI- oder PID-Regler sein



	Regler	Reglerparameter
Approximation mit PT_1T_t - Glied	P	$K_p = 1/K_s \cdot T/T_t$
	PI	$K_p = 0.9/K_s \cdot T/T_t, T_n = 3.33 \cdot T_t$
	PID	$K_p = 1.2/K_s \cdot T/T_t, T_n = 2 \cdot T_t, T_v = 0.5 \cdot T_t$
Schwing-versuch	P	$K_p = 0.5 \cdot K_{p,krit}$
	PI	$K_p = 0.45 \cdot K_{p,krit}, T_n = 0.85 \cdot T_{\text{krit}}$
	PD	$K_p = 0.55 \cdot K_{p,krit}, T_v = 0.15 \cdot T_{\text{krit}}$
	PID	$K_p = 0.6 \cdot K_{p,krit}, T_n = 0.5 \cdot T_{\text{krit}}, T_v = 0.125 \cdot T_{\text{krit}}$

Zur Nomenklatur: $G_R(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s\right)$

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Faustformelverfahren_(Automatisierungstechnik)

10.2 Einstellregeln nach Chien, Hrones und Reswick (1952)

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Erneut Approximation durch PT_1T_t-Glied

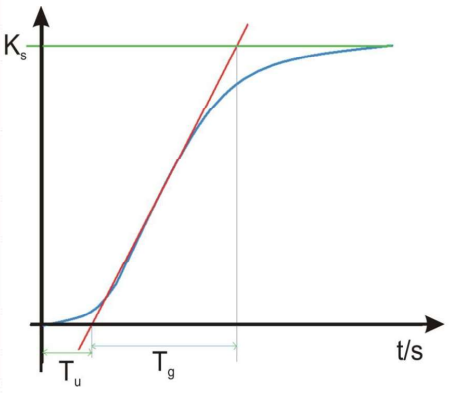
- Bestimmung von T_u, T_g und K_s aus Sprungantwort

Einstellregeln für Verstärkung K_p, Nachstellzeit T_n und Vorhaltezeit T_v gemäß Tabelle:

$$G_R(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_n s} + T_v s\right)$$

Regler		Aperiodischer Regelverlauf		Regelverlauf mit 20% Überschwingen	
		Störung	Führung	Störung	Führung
P	K_p	$0.3 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.3 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.7 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.7 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$
PI	K_p	$0.6 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.35 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.7 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.6 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$
	T_n	$4 \cdot T_u$	$1.2 \cdot T_g$	$2.3 \cdot T_u$	$1 \cdot T_g$
PID	K_p	$0.95 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.6 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$1.2 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$	$0.95 \cdot \frac{T_g}{T_u \cdot K_s}$
	T_n	$2.4 \cdot T_u$	$1 \cdot T_g$	$2 \cdot T_u$	$1.35 \cdot T_g$
	T_v	$0.42 \cdot T_u$	$0.5 \cdot T_u$	$0.42 \cdot T_u$	$0.47 \cdot T_u$

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Faustformelverfahren_(Automatisierungstechnik)



Modifiziert nach http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c9/Tutg.PNG

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

10.1 Einleitung
- Problemstellung – Forderungen an den Reglerentwurf

10.2 Entwurf im Zeitbereich
- Strukturstabile Regelkreise
- Stabilitätsgebiete
- Regler-Parameter-Optimierung
- Einstellregeln

10.3 Entwurf im Frequenzbereich: Frequenzkennlinienverfahren
- **P-, PD-, PI-, PID-Regler und Phasenkorrekturglieder**

10.4 Hausaufgaben

10.3 Frequenzkennlinienverfahren

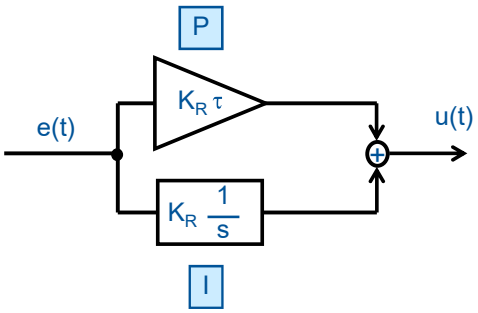
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Untersuchung des Einflusses des Reglerkennlinienverlaufs $G_R(j\omega)$ auf $G_0(j\omega)$ im Bode-Diagramm

Betrachte PI-Regler

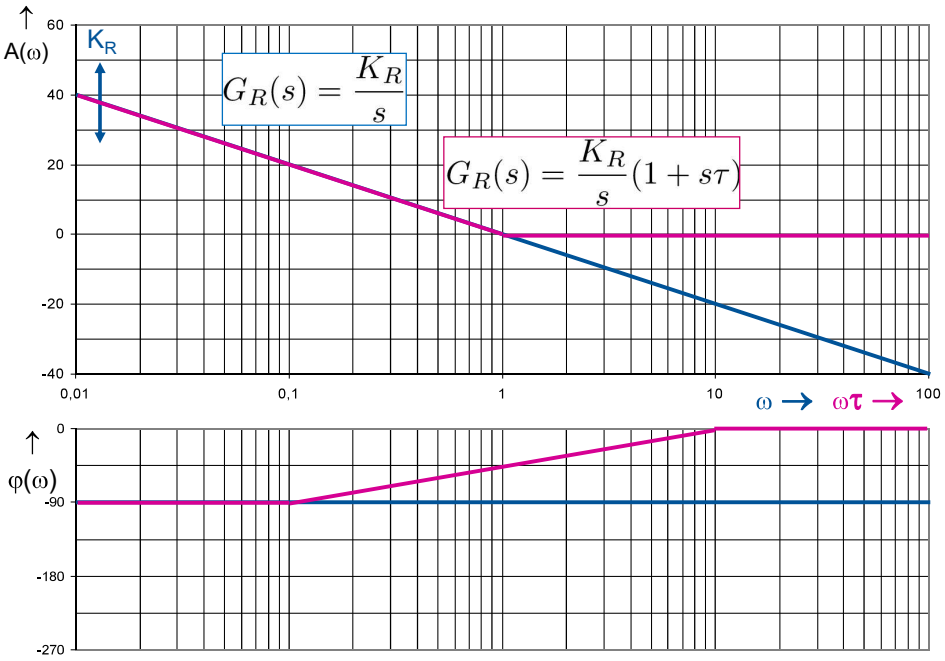
- Struktur

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_R}{s} + K_R\tau = \frac{K_R}{s} \cdot [1 + s\tau]$$

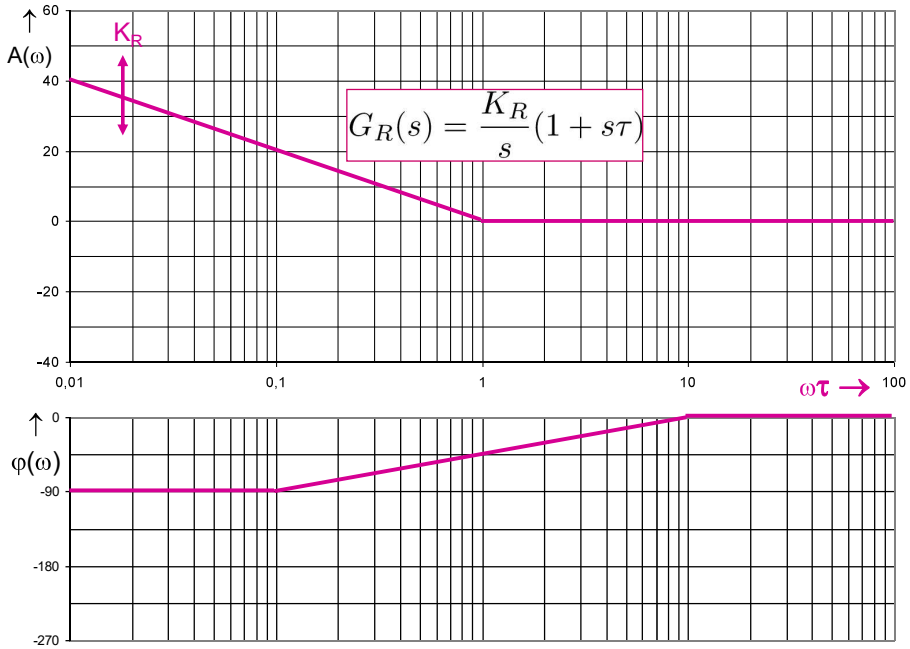


- Parameter: $K_R;\ \tau$

10.3 PI-Regler im Bode-Diagramm



10.3 PI-Regler im Bode-Diagramm



10.3 Beispiel 1: PT_2-Glied + idealer PI-Regler

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben sei eine Regelstrecke 2. Ordnung mit idealem PI-Regler

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s}(1 + s\tau) \quad \text{und} \quad G_S(s) = \frac{K_1}{(1+2s)(1+0,33s)}, \; K_1 = 15$$

Reglerauslegung: folgende Bedingungen sollen erfüllt werden

1) Stationärer Fehler e(∞) = 0 für sprungförmige Führungsgröße
2) Weniger als 10 % Überschwingen
3) Einstellzeit $T_{s,\,5\%}$ < 3 sec

Beachte:

Das Glied mit der größten Zeitkonstante T_1 = 2 sec verursacht schon bei tiefen Frequenzen eine Phasenabsenkung.

→ Wähle τ = größte Zeitkonstante T_1 = 2 sec, um Phasendrehung und die Durchtrittsfrequenz in den oberen Frequenzbereich zu verschieben.

$$\Rightarrow \; G_0(s) = \frac{K_1 K_R}{s(1+0,33s)}$$

Merke:

Eine solche Kompensation von Zeitkonstanten ist nur für stabile Systeme erlaubt.

10.3 Beispiel 1: PT_2-Glied + idealer PI-Regler

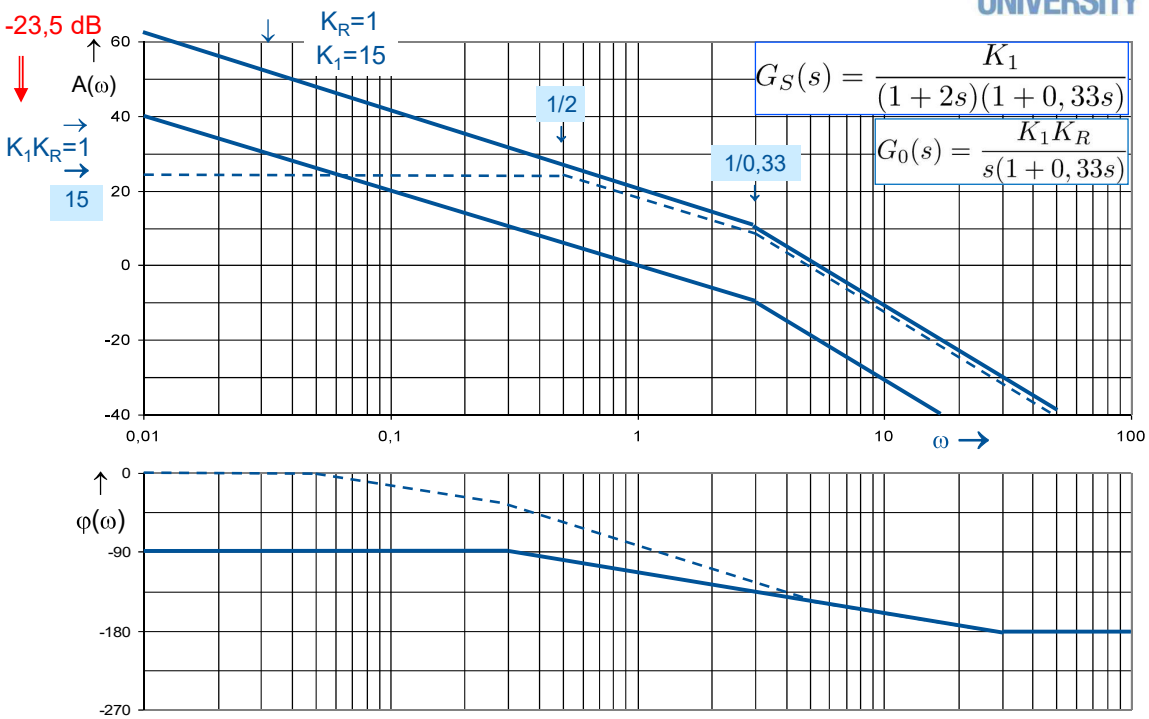
RWTH AACHEN UNIVERSITY

- Erste Bedingung: e(∞) = 0 wird erfüllt durch Wahl eines PI-Reglers.
  - τ ist festgelegt, K_R fehlt noch.
- Zweite Bedingung: aus Kapitel 5 wissen wir: $\%OS = e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}} \cdot 100\%$

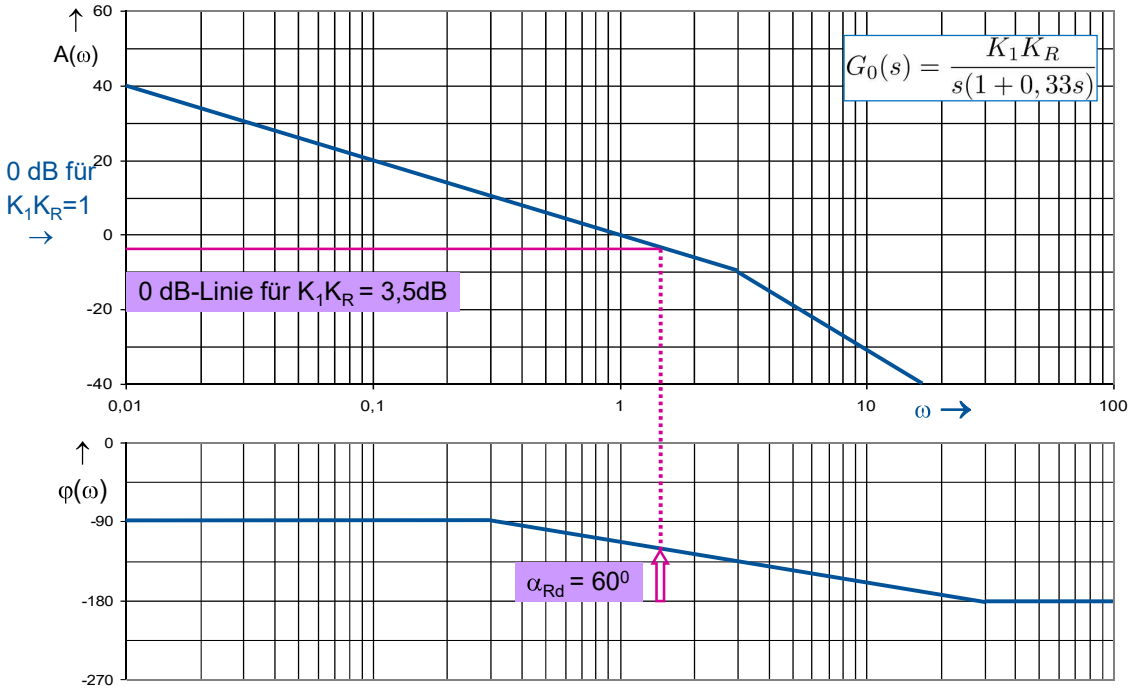
$$\Rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{ln^2(\%OS/100\%)}}} \approx 0,6 \quad \rightarrow \quad \alpha_{Rd} \approx 60° \qquad \text{im Bode-Diagramm suchen …}$$

vgl. S. 22

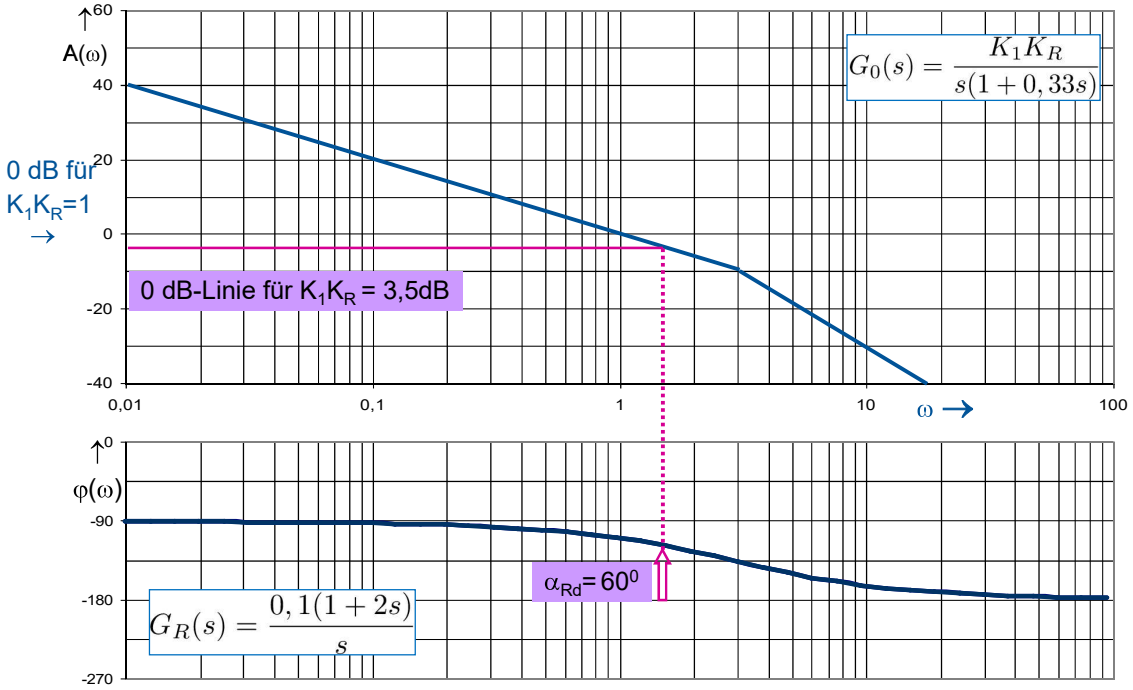
10.3 Beispiel 1: PT_2-Glied + idealer PI-Regler



10.3 Beispiel 1: PT_2-Glied + idealer PI-Regler



10.3 Beispiel 1: PT_2-Glied + idealer PI-Regler



10.3 Beispiel 1: PT_2-Glied + idealer PI-Regler

- Zweite Bedingung: aus Kapitel 5 wissen wir: $\%OS = e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}} \cdot 100\%$

$$\rightarrow \quad D - \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{ln^2(\%OS/100\%)}}} \approx 0,6 \quad \rightarrow \quad \alpha_{Rd} \approx 60° \quad \rightarrow \quad \omega_D - 1,5$$

vgl. S. 22 — aus Bode-Diagramm

  - Notwendige Verstärkung $K_1 K_R = 3,5 \text{ dB} = 1,5 \rightarrow K_R = 1,5/15 = 0,1$

aus Bode-Diagramm

- Dritte Bedingung: in Kapitel 5 haben wir gelernt

$$\frac{1}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} = 0,02 \quad \rightarrow \quad T_{s,2\%} = \frac{-ln\left(0,02\sqrt{1-D^2}\right)}{D\omega_0} \approx \frac{4}{D\omega_0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} = 0,05 \quad \rightarrow \quad T_{s,5\%} = \frac{-ln\left(0,05\sqrt{1-D^2}\right)}{D\omega_0} \approx \frac{3}{D\omega_0}$$

10.3 Beispiel 1: PT$_2$-Glied + idealer PI-Regler

RWTH AACHEN UNIVERSITY

- Nun ist

$$G_0(s) = \frac{K_1 K_R}{s(1+sT_2)} \quad \rightarrow \quad G_{ges}(s) = \frac{\frac{K_1 K_R}{T_2}}{s^2 + \underbrace{\frac{1}{T_2}}_{=2D\omega_0} s + \frac{K_1 K_R}{T_2}}$$

- Der geschlossene Regelkreis ist ein System zweiter Ordnung

$$\rightarrow \quad D\omega_0 = 1,5 \quad \rightarrow \quad T_{s,5\%} = \frac{-ln\left(0,05\sqrt{1-D^2}\right)}{D\omega_0} \approx \frac{3}{D\omega_0} = 2 < 3 \quad \text{okay}$$

Ergebnis:

Für das PT$_2$-System $G_S(s) = \dfrac{15}{(1+2s)(1+0,33s)}$ werden die Bedingungen

erfüllt mit dem PI-Regler $G_R(s) = \dfrac{0,1(1+2s)}{s}$.

- Der offene Kreis ist $G_0(s) = \dfrac{1,5}{s(1+0,33s)}$.

10.3 Beispiel 2: PT$_3$-Glied + idealer PI-Regler

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gegeben ist das folgende System

$$G_0(s) = \frac{K_R(1+\tau s)}{s} \cdot \frac{15}{(1+0,3s)(1+0,2s)(1+0,05s)}$$

Aufgabe:

- Finden Sie einen geeigneten PI-Regler!
- Wähle wieder τ = 0,3 → Kompensation des niederfrequentesten Pols

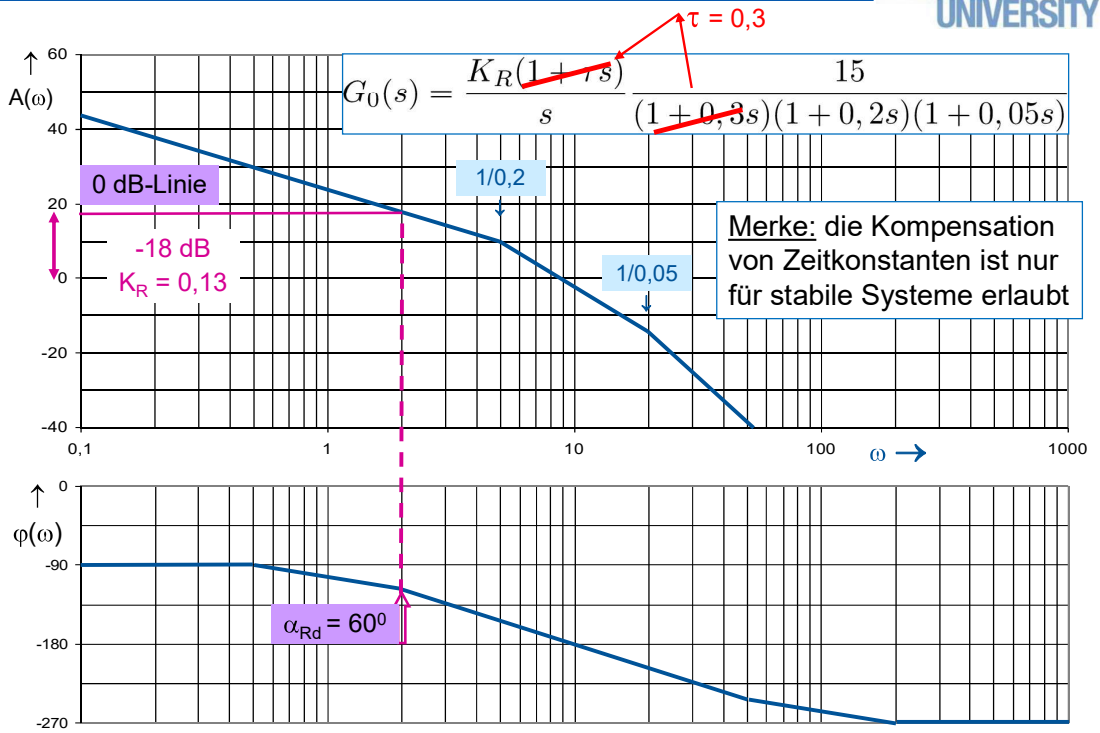
$$G_0(s) = \frac{K_R}{s} \cdot \frac{15}{(1+0,2s)(1+0,05s)}$$

- Gewünschter Phasenrand

$$\alpha_{Rd} = 60° \rightarrow \text{suche passendes } K_R \text{ im Bode-Diagramm}$$

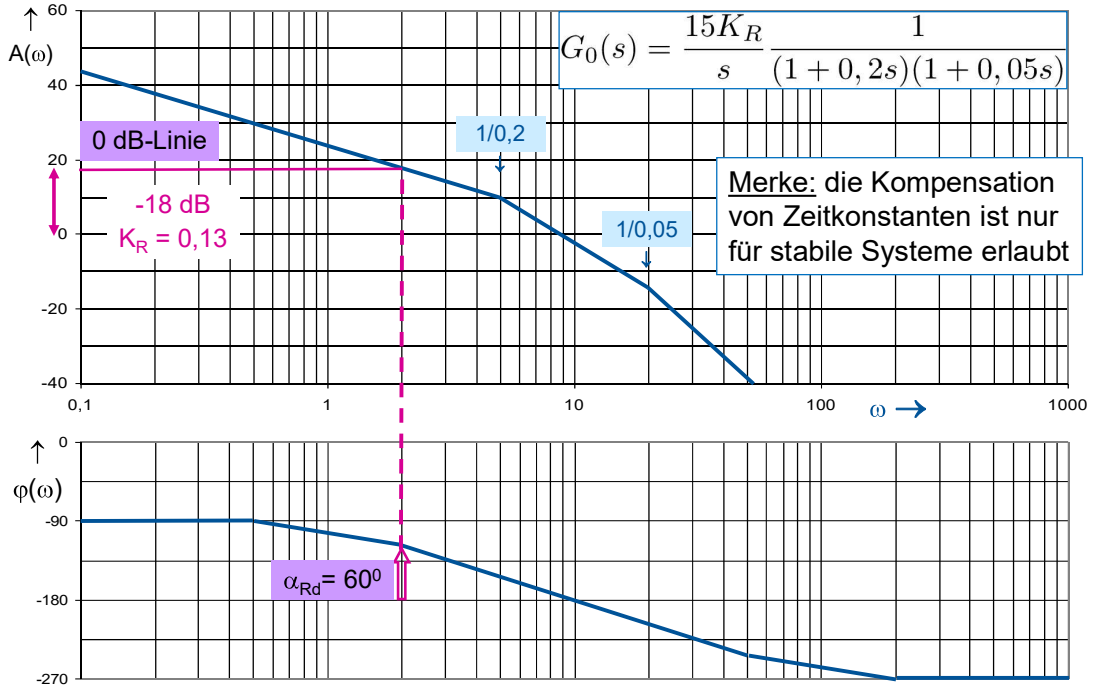
10.3 Beispiel 2: PT_3-Glied + idealer PI-Regler

RWTH AACHEN UNIVERSITY



10.3 Beispiel 2: PT_3-Glied + idealer PI-Regler

RWTH AACHEN UNIVERSITY



10.3 Beispiel 2: PT_3-Glied + idealer PI-Regler

Für das gegebene System

$$G_0(s) = \frac{K_R(1+\tau s)}{s} \cdot \frac{15}{(1+0,3s)(1+0,2s)(1+0,05s)}$$

ergibt sich folgende

Lösung:

- Phasenrand $\alpha_{Rd} = 60° \;\rightarrow\; K_R = -18 \text{ dB} = 0,13$

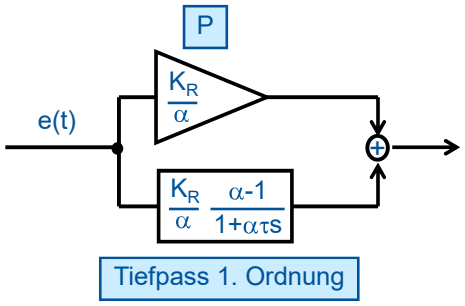
- Resultierende PI-Regler-Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = 0,13 \cdot \frac{1+0,3s}{s}$$

10.3 Phasenkorrekturglieder

Wir betrachten zunächst das **phasenabsenkende Übertragungsglied** (*Lag*-Glied)

$$G_R(s) = K_R \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \;,\; \alpha > 1$$



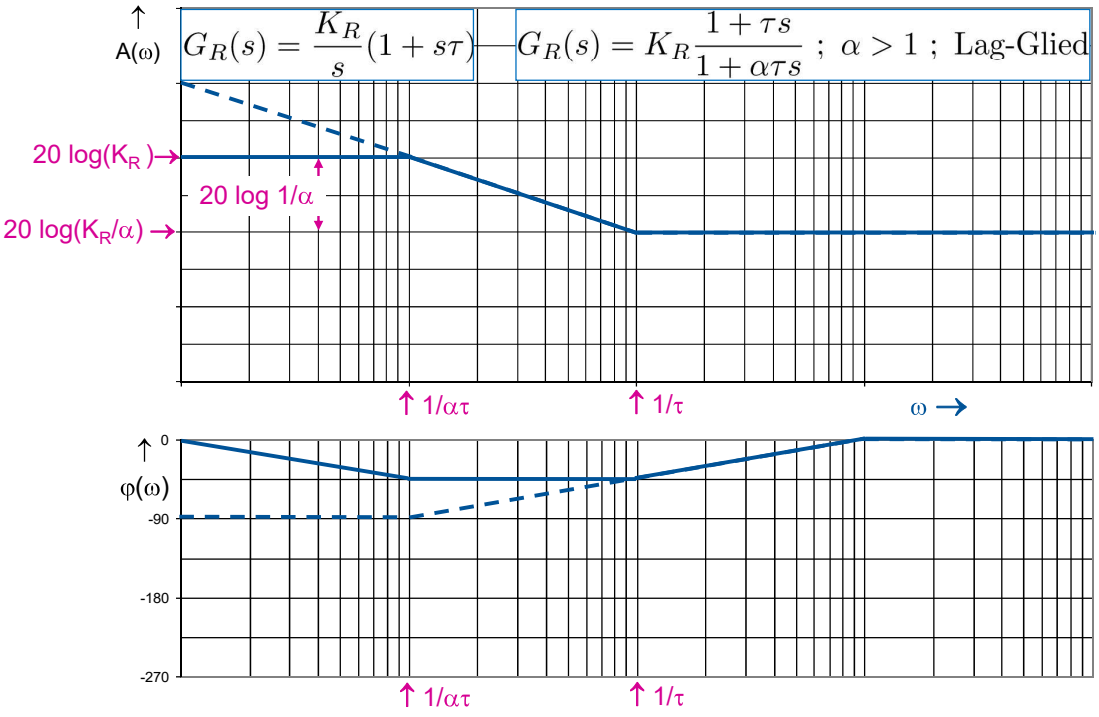
Beachte:

- es handelt sich um ein spezielles PDT_1 - Glied
- dieses Glied erinnert an einen „realen“ PI-Regler (nichtidealer PI → NPI) …

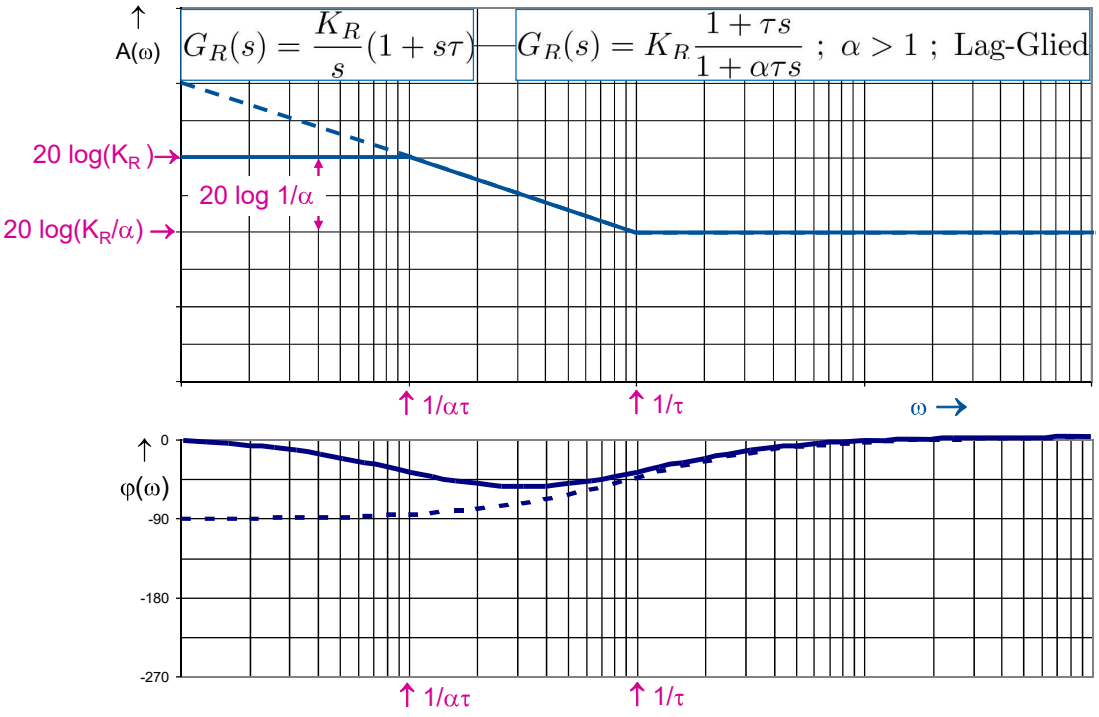
Parameter: $K_R;\ \tau;\ \alpha$

- Regler mit einer solchen Übertragungsfunktion werden häufig in rückgekoppelten elektronischen Schaltungen (z.B. OP-Schaltungen) eingesetzt und dann als „*Kompensationsnetzwerke*“ bezeichnet …
- Von manchen Autoren werden derartige Kompensationsglieder auch als *lag-lead*-Kompensationsglieder bezeichnet (siehe p. 67 ff.)

10.3 phasenabsenkendes Übertragungsglied (*Lag*-Glied)



10.3 phasenabsenkendes Übertragungsglied (*Lag*-Glied)



10.3 phasenabsenkendes Übertragungsglied (*Lag*-Glied)

Dimensionierung:

- Bestimmung von K_R so, dass stationärer Fehler innerhalb der Fehlertoleranz

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + G_R(s)G(s)} sW(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + K_R G(s)} sW(s) \text{ liegt.}$$

- Aufzeichnen von $K_R G(s)$ im Bode-Diagramm
- Durchtrittsfrequenz ω_D bei $\alpha_{Rd} + 5°$ einzeichnen. + 5⁰ zur Berücksichtigung des NPIs.
- Nullstelle von $G_R(s)$ bei $1/\tau = 0,1\omega_D$ festlegen. Begründung: weit links von ω_D, um das Reglerverhalten im Bereich der Durchtrittsfrequenz wenig zu beeinflussen
- α ergibt sich dann aus $|G(\omega_D)|K_R/\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = |G(\omega_D)|K_R$
- Der Pol von $G_R(s)$ liegt dann bei $s = -1/\alpha\tau = -0,1\omega_D/\alpha$

10.3 Beispiel 3: IT_1-Glied mit *Lag*-Kompensation I

Gegeben sei das System

$$G(s) = \frac{K}{s \cdot (1 + 0,5s)} \qquad IT_1\text{-Glied}$$

Vorgaben:

- Rampenfehler $e(\infty) = 0,05$ Zum Zeichnen wähle K = 1
- Phasenrand $\alpha_{Rd} = 45°$

Berechnungen:

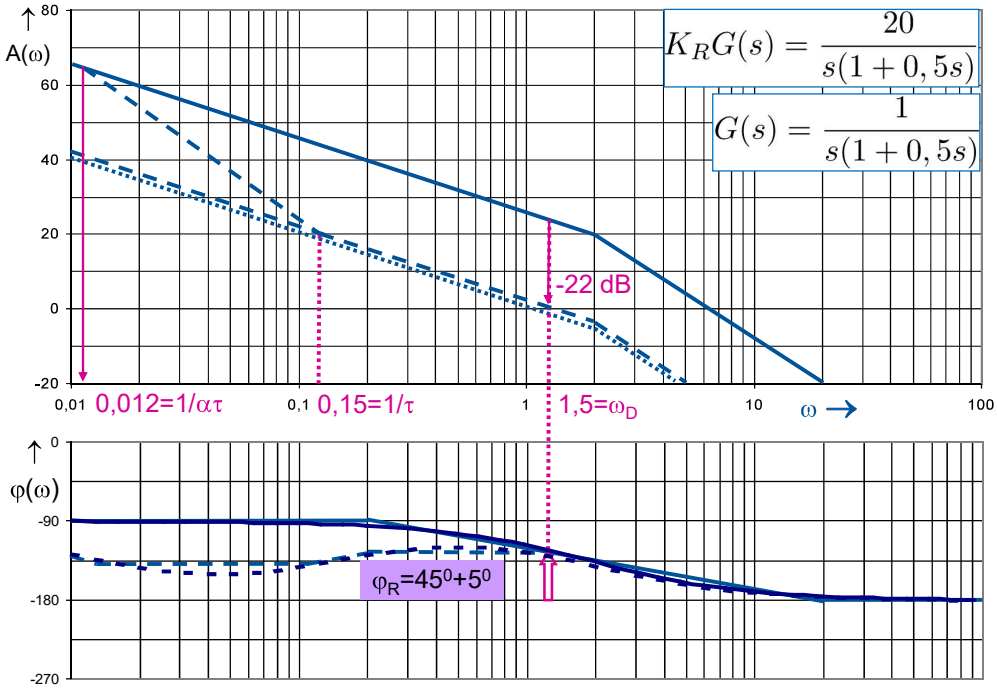
1.
$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + K_R \cdot G(s)} \cdot s \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + K_R \cdot \frac{K}{s\cdot(1+0,5s)}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\approx \frac{1}{K_R \cdot K} = 0,05$$

$$\Rightarrow \quad K_R \cdot K = 20 \quad \rightarrow \quad 20 \cdot log(K_R \cdot K) = 26,02\ dB$$

2. Bestimmung der Durchtrittsfrequenz ω_D im Bode-Diagramm. Hier: ω_D = 1,5.
3. Wähle die Nullstelle des Reglers $1/\tau$ = 0,1 ω_D = 0,15.

10.3 Beispiel 3: IT$_1$-Glied mit *Lag*-Kompensation II



10.3 Beispiel 3: IT$_1$-Glied mit *Lag*-Kompensation III

4. Wähle die notwendige Dämpfung bei ω_D: diese beträgt -22 dB. K_R ist ausgeklammert und schon festgelegt. Dies führt zu

$$-22\ dB = 20\ log(1/\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} = 10^{-\frac{22}{20}} = 0,0794 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 12,58$$

5. Der Pol des nichtidealen PI-Reglers liegt bei

$$s = -1/\alpha\tau = -0,1\omega_D/\alpha = -0,012$$

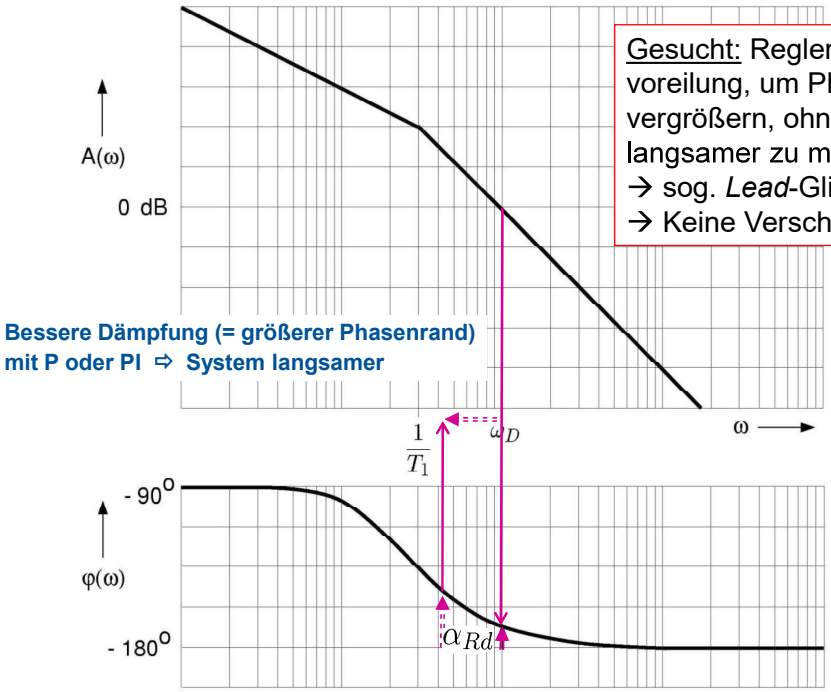
6. Der gesamte nichtideale PI-Regler (*Lag*-Kompensator) ist gegeben durch

$$G_R(s) = \frac{20}{K} \cdot \frac{1 + \frac{1}{0,15}s}{1 + \frac{1}{0,012}s}$$

7. Die offene Strecke ist

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G(s) = \frac{20}{K} \cdot \frac{1+6,7s}{1+84s} \cdot \frac{K}{s \cdot (1+0,5s)} = \frac{20 \cdot (1+6,7s)}{s \cdot (1+0,5s) \cdot (1+84s)}$$

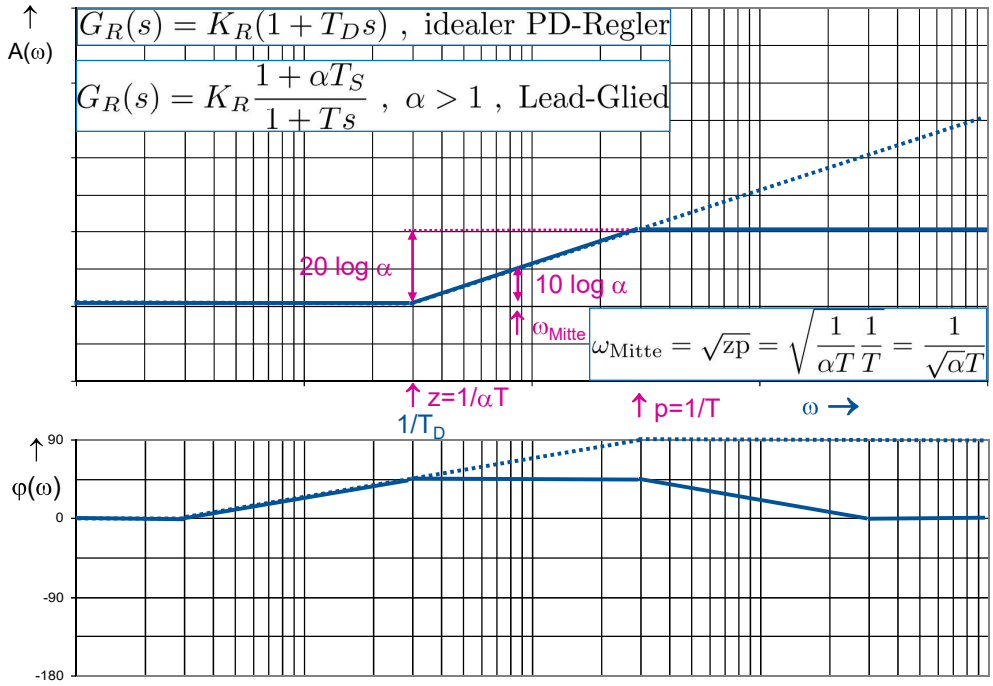
10.3 System mit schlechter Dämpfung



Gesucht: Regler mit Phasenvoreilung, um Phasenrand zu vergrößern, ohne das System langsamer zu machen …
→ sog. *Lead*-Glied
→ Keine Verschiebung von ω_D

Bessere Dämpfung (= größerer Phasenrand) mit P oder PI ⇨ System langsamer

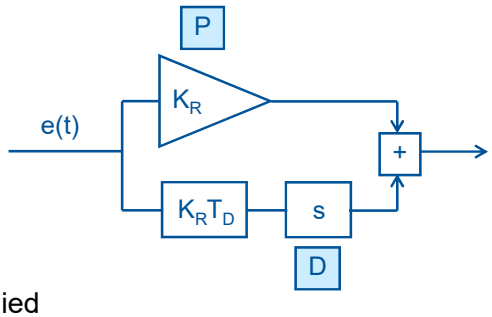
10.3 phasenanhebendes Übertragungsglied (*Lead*-Glied)



10.3 phasenanhebendes Übertragungsglied (*Lead*-Glied)

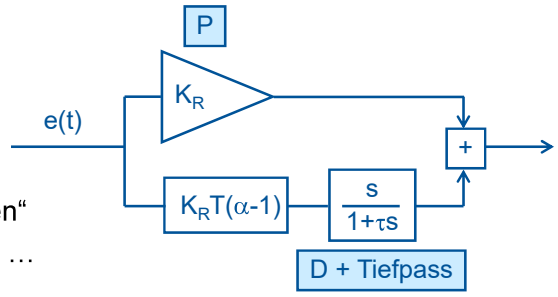
- Idealer PD-Regler

$$G_R(s) = K_R \cdot (1 + T_D s)$$



- Phasenanhebendes Übertragungsglied

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + \alpha T_S}{1 + Ts} \;,\; \alpha > 1$$



Beachte:

- es handelt sich erneut um ein spezielles PDT_1-Glied
- dieses Glied erinnert an einen „realen" PD-Regler (nichtidealer PD → NPD) …

Parameter: $K_R;\ T;\ \alpha$

10.3 Dimensionierung des *Lead*-Übertragungsgliedes

1. Bestimmung von K_R so, dass stationärer Fehler innerhalb der Fehlertoleranz

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + G_R(s)G(s)} \cdot s \cdot W(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + K_R G(s)} \cdot s \cdot W(s)$$

2. Aufzeichnen von $K_R G(s)$
   Bestimmung des Phasenrands α_{Rd} und der zusätzlich notwendigen Phasenvoreilung φ_{Add} (zuzüglich 5^0 Reserve)
3. Bestimmung α zu φ_{Add} gemäß

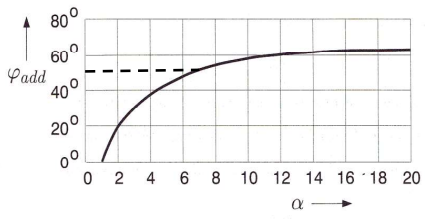


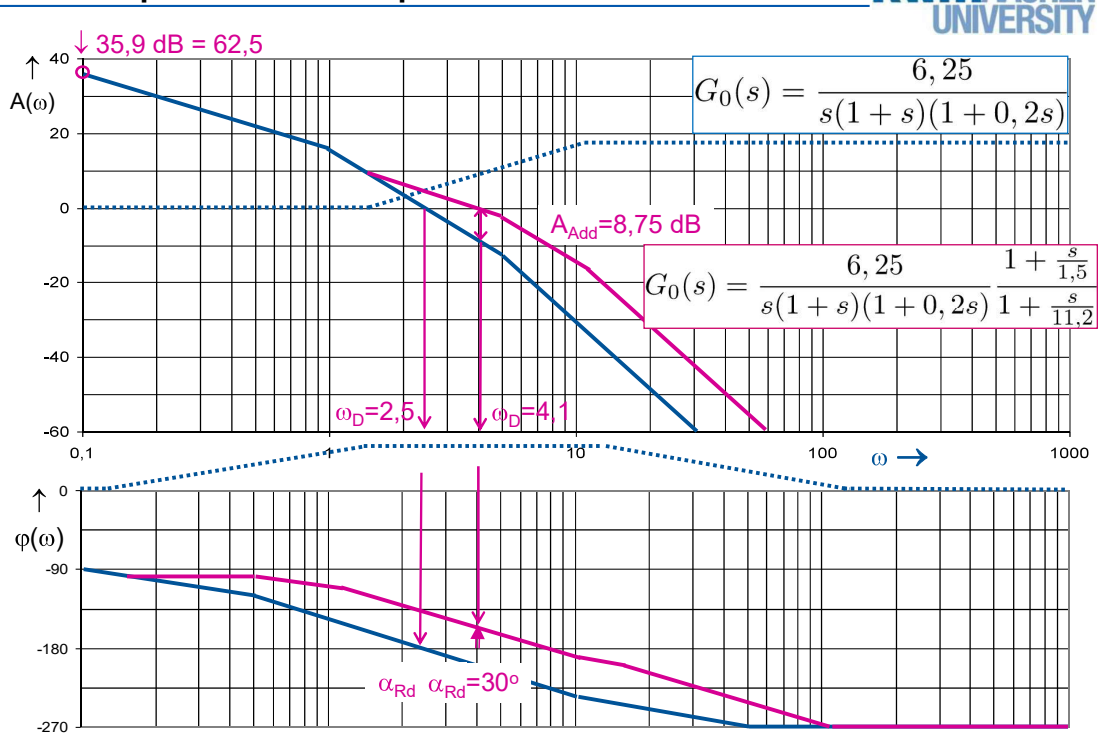
Abbildung 7.13: Phasenvoreilung $\varphi_{add} = \arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$

4. Die Frequenz, bei der $|K_R G(j\omega)| = -10 \log \alpha$ dB beträgt, ist die neue Durchtrittsfrequenz ω_D (und, per Konstruktion, = ω_{Mitte})

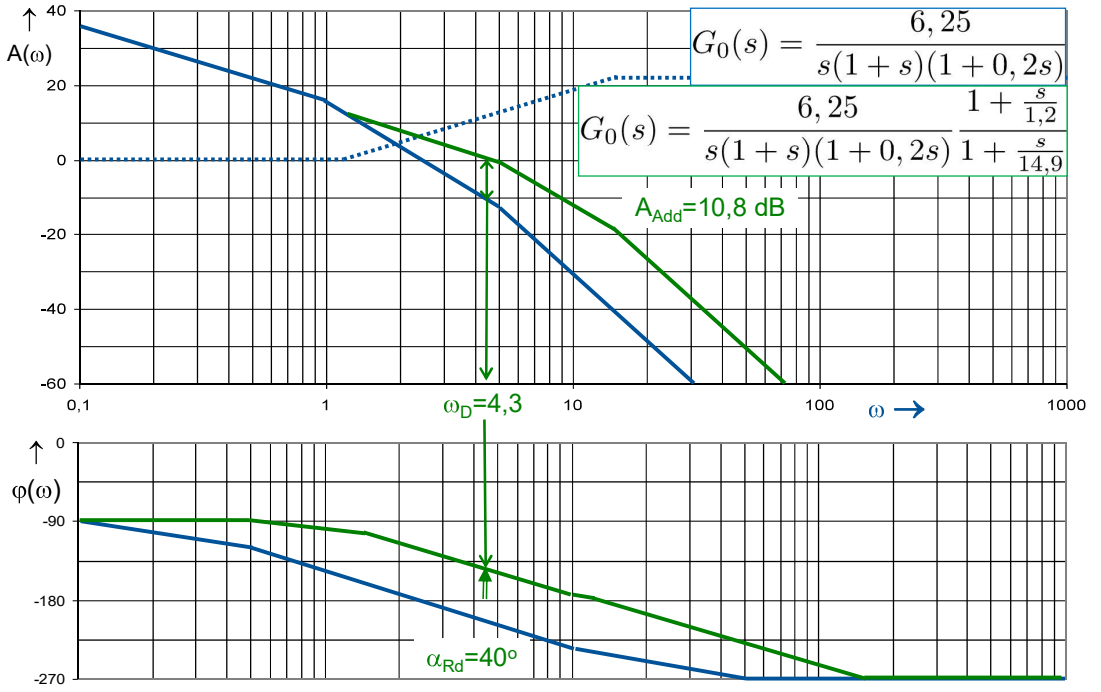
Pol: $\frac{1}{T} = \omega_D \sqrt{\alpha}$ Nullstelle: $\frac{1}{(\alpha T)} = \frac{\omega_D}{\sqrt{\alpha}}$ $\omega_{\text{Mitte}} = \sqrt{\text{zp}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

5. Man überprüfe den resultierenden Phasenrand α_{Rd} und wiederhole gegebenenfalls die Dimensionierung mit einem geeigneteren α

10.3 Beispiel 4: *Lead*-Kompensation

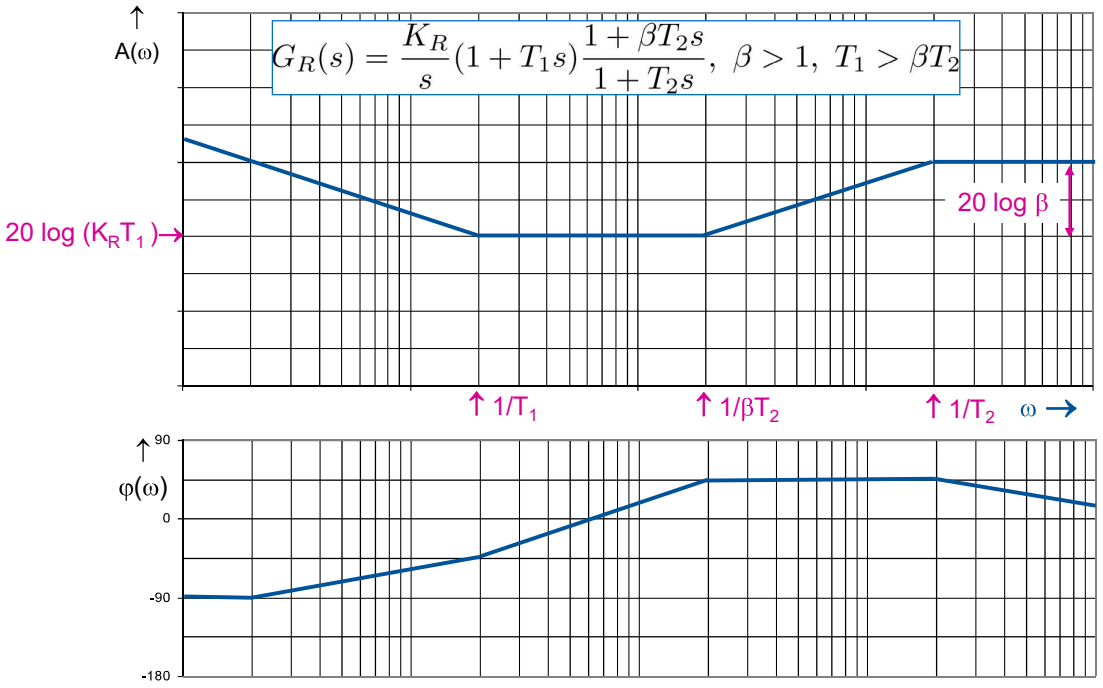


10.3 Beispiel 4: *Lead*-Kompensation



10.3 Lag-Lead-Kompensation (realer PID-Regler)

RWTH AACHEN UNIVERSITY



10.3 Dimensionierung des realen PID-Reglers

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Bestimmung von K_R so, dass der stationäre Fehler innerhalb der Fehlertoleranz liegt

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_R(s)G(s)} sW(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K_R G(s)}{s}}$$

   Hinweis: $G_R(s \to 0) = K_R/s$

2. Aufzeichnen von $K_R G(s)$ im Bodediagramm, Bestimmung des Phasenrands α_{Rd} und der zusätzlich notwendigen Phasenvoreilung φ_{Add}

3. Bestimmung β zu φ_{Add} aus Fig. 7.13 $(\beta = \alpha)$, $\omega_D = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta}T_2} \Rightarrow \frac{1}{T_2} = \sqrt{\beta}\omega_D$

4. Da ω_D im ansteigenden Teil des Amplitudengangs liegt, ist

$$\omega_D > \frac{1}{T_1} \text{ und } \frac{1}{T_2} > \omega_D > \frac{1}{(\beta T_2)} \Rightarrow |G_R(s=j\omega_D)| = K_R T_1 \beta \underbrace{T_2\omega_D}_{1/\sqrt{\beta}} = K_R T_1 \sqrt{\beta}$$

   Aus $|G(j\omega_D)||G_R(j\omega_D)| = 1 \quad \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{1}{|K_R G(j\omega_D)|\sqrt{\beta}}}$

⇨ Jetzt Amplituden- und Phasenanhebung bei ω_D unabhängig einstellbar.

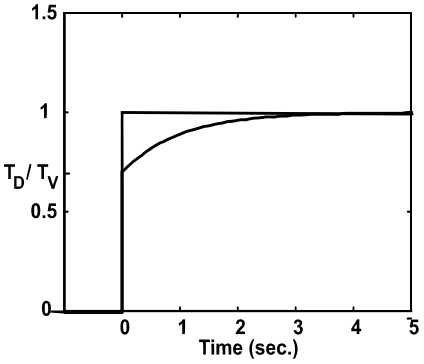
10.3 Fazit zu Kompensationsgliedern

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Phasenabsenkendes (Amplitudenabsenkendes) Korrekturglied

(*Lag*-Kompensation)

$$G'_R(j\omega) = \frac{1 + T_D j\omega}{1 + T_V j\omega} \text{ mit } (T_D < T_V)$$



PDT$_1$-Glied

Beispiel:

$K_R = 5$

$T_D = 20\,\text{sec}$

$T_V = 50\,\text{sec}$

Strecke: PT$_2$-Glied

$$G_S(s) = \frac{1}{(1 + T_1 s) \cdot (1 + T_2 s)}\ , \quad \text{mit } T_1 = 1 \text{ sec}\ ,\ T_2 = 0{,}1 \text{ sec}$$

10.3 Ergebnis

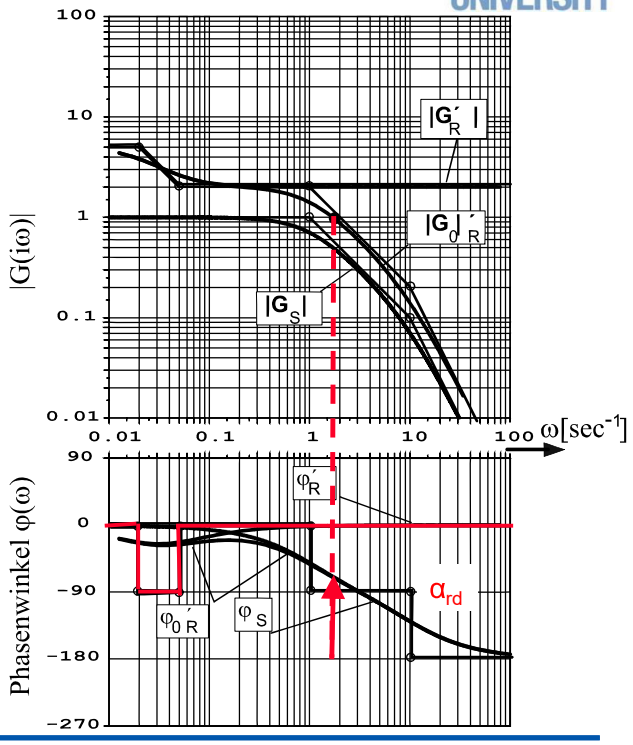
RWTH AACHEN UNIVERSITY

P-Regler mit phasenabsenkendem Korrekturglied im Vergleich zum P-Regler:

- senkt die Durchtrittsfrequenz ω_D (4,6 sec^{-1} → 1,7 sec^{-1})
- vergrößert den Phasenrand α_{rd} etwas (80° → 110°)
- ändert die Kreisverstärkung K_0 nicht

Ein phasenabsenkendes Korrekturglied reduziert frequenzabhängig den Amplitudengang

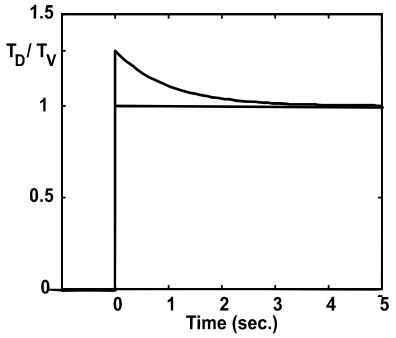
- Es bewirkt eine negative Phasenverschiebung und wird deshalb im Bereich niedriger Kreisfrequenzen in großem Abstand von der Durchtrittsfrequenz ω_D eingesetzt, damit die Stabilitätseigenschaften nicht verschlechtert werden.
- Es beeinflußt dann primär das stationäre Verhalten



10.3 Fazit zu Kompensationsgliedern

Phasenanhebendes Korrekturglied (*Lead*-Kompensation):

- Durch Korrekturglieder kann der Frequenzgang $G_0(j\omega)$ in bestimmten Frequenzbereichen beeinflusst werden.



PDT$_1$-Glied

- Gegeben sei

$$G_{R,gesamt}(j\omega) = G_R(j\omega)G'_R(j\omega)$$

mit $$G'_R(j\omega) = \frac{1+T_D j\omega}{1+T_V j\omega} \text{ mit } (T_D > T_V)$$

$$G_R(j\omega) = K_R \quad \text{(P-Regler)}$$

und

$$K_R = 5;\ T_D = 0{,}33\,\text{sec};\ T_V = 0{,}1\,\text{sec}$$

$$G_S(j\omega) = \frac{K_S}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)} \text{ mit } K_S = 1;\ T_1 = 1\text{sec};\ T_2 = 0,1\text{sec}$$

10.3 Ergebnis

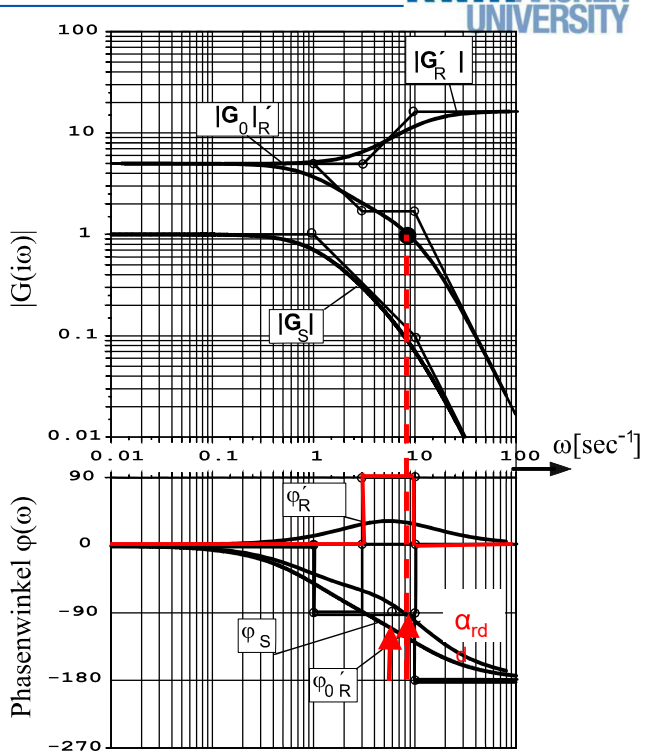
P-Regler mit phasenanhebendem Korrekturglied im Vergleich zum reinen P-Regler:

- vergrößert die Durchtrittsfrequenz ω_D (4,5 → 8,6 sec^{-1})
- vergrößert den Phasenrand α_{rd} (im konkreten Fall 80° → 86°)
- ändert die Kreisverstärkung $K_0 = K_R K_S$ nicht

Merke:

Eine **Phasenanhebung** in der Nähe der Durchtrittsfrequenz ω_D hat im allgemeinen folgende Effekte:

- vergrößert die Stabilitätsreserve
- verringert das Überschwingen der Regelgröße



10.3 Einfluss der Kennwerte des Frequenzgangs $G_0(j\omega)$ des offenen Regelkreises auf den geschlossenen Regelkreis

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Die **Stabilitätsreserve** (Abstand zur Stabilitätsgrenze) wird durch
   - Phasenrand (Phasenreserve) α_{rd}
   - Amplitudenrand (Amplitudenreserve) A_{rd}

   relativ zum kritischen Punkt (-1,j0) beschrieben.
2. Die **Kreisverstärkung** $G_0(0) = \lim_{\omega \to 0} G_0(j\omega)$ beeinflusst das statische Verhalten (Verhalten bei sehr kleinen Frequenzen) und damit die bleibende Regeldifferenz $\lim_{t \to \infty} e(t)$ nach sprungförmiger Änderung der Führungsgröße.
3. Die **Durchtrittsfrequenz** ω_D (engl.: *crossover frequency*) erhält man bei $|G_0(j\omega_D)| = 1$. Damit wird beschrieben, ab welcher Frequenz $|G_0(j\omega_D)| < 1$ wird.
   - Das heißt, oberhalb von ω_D wird eine harmonische Schwingung beim Durchlaufen des Reglers und der Regelstrecke in ihrer Amplitude verkleinert (um die Gesamtwirkung zu betrachten, müsste noch die Phasendrehung berücksichtigt werden).
   - Damit ist auch die Durchtrittsfrequenz ω_D ein Maß für die *Bandbreite* $0 < \omega < \omega_D$ von $G_0(j\omega)$ (i.e. "*Durchlaßbereich*" von harmonischen Schwingungen).

10.3 Einfluss der Kennwerte des Frequenzgangs $G_0(j\omega)$ des offenen Regelkreises auf den geschlossenen Regelkreis

RWTH AACHEN UNIVERSITY

- Dieser steht im Zusammenhang mit der Bandbreite des geschlossenen Regelkreises.
  - In der Regel wird mit größerer Durchtrittsfrequenz ω_D die **Anstiegszeit** (Anregelzeit, "Schnelligkeit" der Antwort) des geschlossenen Regelkreises bei einem Führungsgrößensprung kleiner, aber die Überschwingweite größer.

4. Eine **Phasenanhebung** in der Nähe von ω_D bewirkt im allgemeinen:
   - Vergrößerung der Stabilitätsreserve
   - Verringerung des Überschwingens der Regelgröße
5. Eine **Phasenabsenkung** hat im allgemeinen folgende Effekte:
   - Amplitudengang wird abgesenkt und damit ω_D verringert
   - verkleinert die Stabilitätsreserve
6. Der Amplitudengang $|G_0(j\omega_D)|$ soll im Bereich der Durchtrittsfrequenz mit etwa 20 dB / Dekade abfallen. Dann ist der Phasenrand im gewünschten Bereich von 0° - 90°.

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

10.1 Einleitung
- Problemstellung – Forderungen an den Reglerentwurf

10.2 Entwurf im Zeitbereich
- Strukturstabile Regelkreise
- Stabilitätsgebiete
- Regler-Parameter-Optimierung
- Einstellregeln

10.3 Entwurf im Frequenzbereich: Frequenzkennlinienverfahren
- P-, PD-, PI- und PID-Regler und Phasenkorrekturglieder

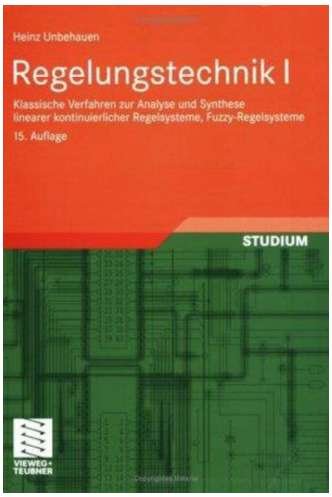
10.4 **Hausaufgaben**

10.4 Zum Nachlesen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Hausaufgabe:
- Wiederholen Sie dieses Skript …

Zum Weiterlesen:
- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
  - Lesen Sie Kap. 8



Zum Üben (auf Englisch)
- http://www.engin.umich.edu/class/ctms/freq/freq.htm

11. Kaskadenregelung und Störgrößenaufschaltung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

11.1 Kaskadenregelung: Kombination innerer und äußerer Regelung

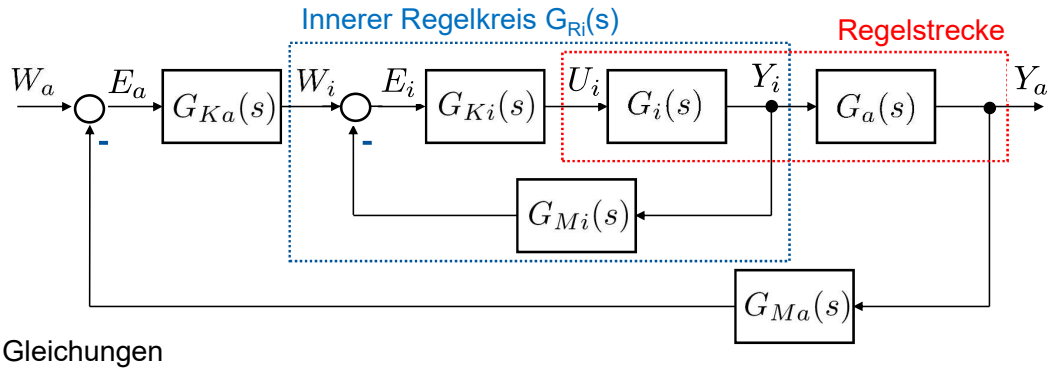
- **Grundprinzip**
- **Dimensionierung**
- **Beispiel**

11.2 Störgrößenaufschaltung

- Verbesserung der Regelung durch Messung der Störgröße (falls die Störgröße messbar ist)

11.3 Zusammenfassung und Hausaufgabe

11.1 Kaskadenregelung



Gleichungen

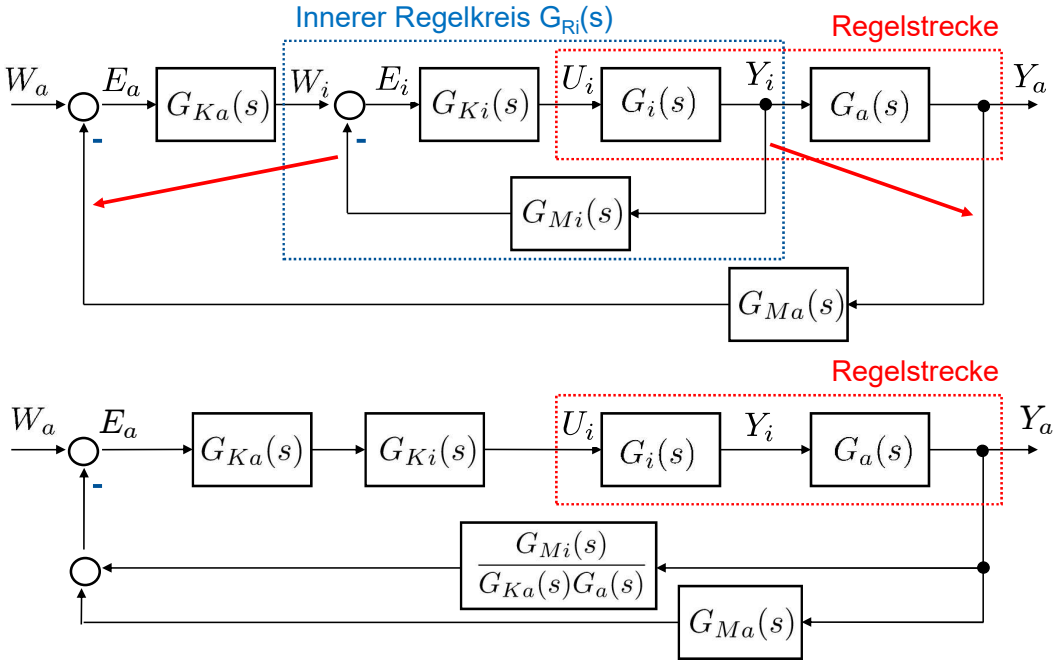
- Innerer Kreis

$$\frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = G_{Ri}(s) = \frac{G_{Ki}(s)G_i(s)}{1+G_{0i}(s)} \quad \text{mit} \quad G_{0i}(s) = G_{Ki}(s)G_i(s)G_{Mi}(s)$$

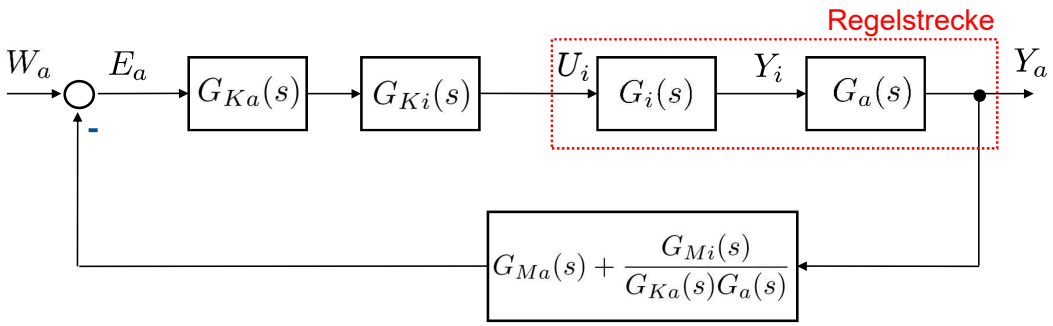
- Äußerer Kreis

$$\frac{Y_a(s)}{W_a(s)} = \frac{G_{Ka}(s)G_{Ri}(s)G_a(s)}{1+G_0(s)} \quad \text{mit} \quad G_0(s) = G_{Ka}(s)G_{Ri}(s)G_a(s)G_{Ma}(s)$$

11.1 Kaskadenregelung



11.1 Kaskadenregelung



Einfache Regelung prinzipiell äquivalent!

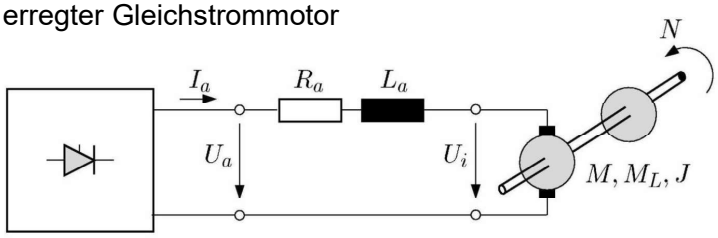
Gründe für Kaskadenregelung:

- Geringerer Einfluss von Abweichungen in $G_a(s)$ (Messfehler, Parameterdrift)
  $\rightarrow$ Niedrige Durchtrittsfrequenz von $G_a(s)$
- Getrennte Dimensionierung leichter durchzuführen
- Nichtlinearitäten
  - Eingrenzung des Einflusses von Nichtlinearitäten
  - Einfache Regelung nicht mehr äquivalent

11.1 Kaskadenregelung: Beispiel

Beispiel:

- Konstant erregter Gleichstrommotor



Modellbildung

- Ankerstromkreis $U_a = R_a I_a + L_a \frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} + U_i$
- Induktionsgleichung $U_i = C\psi_0 N$
- Momenten-Gleichung $M - M_L = J 2\pi \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$
- Energieerhaltung (+ Einsetzen der Induktionsgl.) $\underbrace{2\pi N M}_{P_m} = \underbrace{U_i I_a}_{P_e} \Leftrightarrow M = \frac{C}{2\pi}\psi_0 I_a$

- Lastmoment M_L, Trägheitsmoment J, Motorkonstante ψ_0

11.1 Beispiel Kaskadenregelung: Gleichungen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Normierung der physikalischen, Einheiten-behafteten Größen auf

- Nennankerspannung U_{aN}
- Nennankerstrom I_{aN}
- Nennmoment M_N
- Nenndrehzahl N_N

Damit lauten die 4 Motor-Gleichungen in bezogener, Einheiten-unabhängiger Schreibweise

$$U_a = R_a I_a + L_a \frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} + U_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_a}{U_{aN}} = \frac{R_a I_{aN}}{U_{aN}} \cdot \frac{I_a}{I_{aN}} + \frac{L_a I_{aN}}{U_{aN}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{I_a}{I_{aN}}\right) + \frac{U_i}{U_{aN}}$$

$$U_i = C\psi_0 N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_i}{U_{aN}} = \frac{C\psi_0 N_N}{U_{aN}} \cdot \frac{N}{N_N}$$

$$M - M_L = J 2\pi \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M - M_L}{M_N} = \frac{2\pi J \cdot N_N}{M_N} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{N}{N_N}\right)$$

$$M = \frac{C}{2\pi}\psi_0 I_a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M}{M_N} = \frac{C\psi_0 I_{aN}}{2\pi M_N} \cdot \frac{I_a}{I_{aN}}$$

11.1 Beispiel Kaskadenregelung: Gleichungen

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Sei $u_a = U_a / U_{aN}$, $i_a = I_a / I_{aN}$ und $n = N / N_N$.

Normiere M / M_N und M_L / M_N zusätzlich durch beidseitige Division durch $\frac{C\psi_0 I_{aN}}{2\pi M_N}$.

Sei dann $\frac{M - M_L}{M_N} \cdot \frac{1}{\frac{C\psi_0 I_{aN}}{2\pi M_N}} = m - m_L$ und $\frac{M}{M_N} \cdot \frac{1}{\frac{C\psi_0 I_{aN}}{2\pi M_N}} = m = \frac{I_a}{I_{aN}} = i_a$.

Mit $K_1 = \frac{I_{aN} R_a}{U_{aN}}$, $K_2 = \frac{4\pi^2 J N_N}{C\psi_0 I_{aN}}$, $K_3 = \frac{C\psi_0 N_N}{U_{aN}}$, $T_a = \frac{L_a}{R_a}$

lauten dann die Motor-Gleichungen in normierter Schreibweise

$$U_a = R_a I_a + L_a \frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t} + U_i \quad \Leftrightarrow \quad u_a = K_1 i_a + K_1 T_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + u_i$$

$$U_i = C\psi_0 N \quad \Leftrightarrow \quad u_i = K_3 n$$

$$M - M_L = J 2\pi \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad m - m_L = K_2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$$

$$M = \frac{C}{2\pi}\psi_0 I_a \quad \Leftrightarrow \quad m = i_a$$

11.1 Beispiel Kaskadenregelung: Blockschaltbild

RWTH AACHEN UNIVERSITY

$$u_a = K_1 i_a + K_1 T_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + u_i \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \; u_a - u_i = K_1(1 + T_a s) i_a \;\; (1) \qquad m = i_a \;\; (2)$$

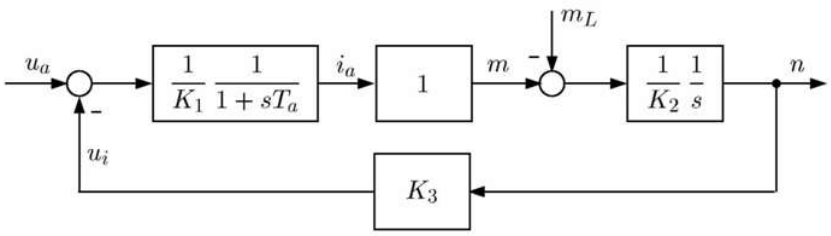
$$m - m_L = K_2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \; m - m_L = K_2 s n \;\; (3) \qquad u_i = K_3 n \;\; (4)$$

11.1 Beispiel Kaskadenregelung: Blockschaltbild

RWTH AACHEN UNIVERSITY

$$u_a = K_1 i_a + K_1 T_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + u_i \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \; u_a - u_i = K_1(1 + T_a s) i_a \;\; (1) \qquad m = i_a \;\; (2)$$

$$m - m_L = K_2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \; m - m_L = K_2 s n \;\; (3) \qquad u_i = K_3 n \;\; (4)$$



11.1 Beispiel Kaskadenregelung: Blockschaltbild

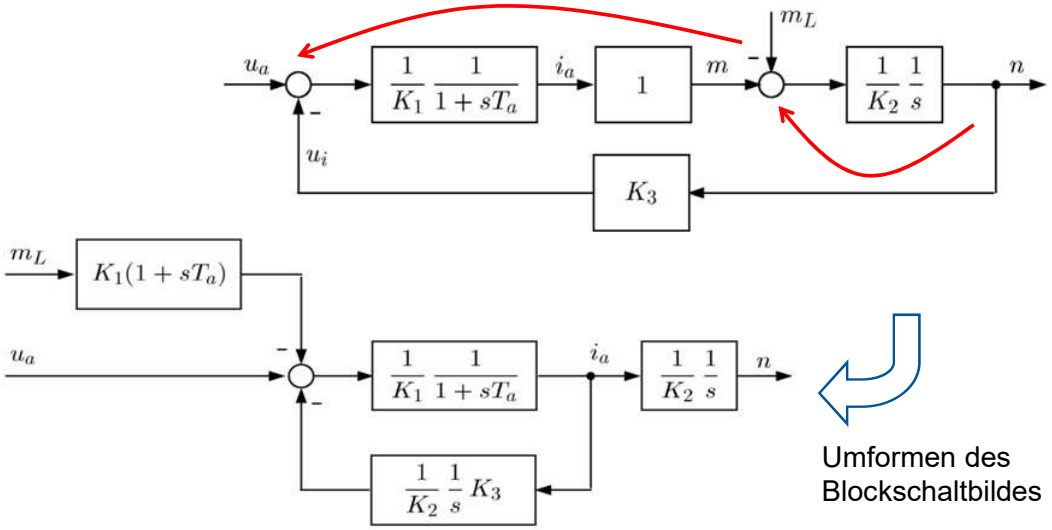
RWTH AACHEN UNIVERSITY

$$u_a = K_1 i_a + K_1 T_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + u_i \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad u_a - u_i = K_1(1 + T_a s) i_a$$

$$m - m_L = K_2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad m - m_L = K_2 s n$$

$$m = i_a$$

$$u_i = K_3 n$$

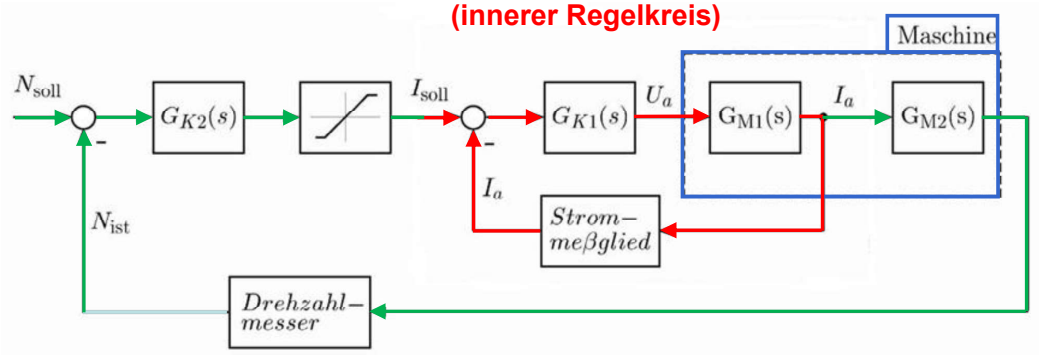


Umformen des Blockschaltbildes

11.1 Kaskadenregelung: Zielstruktur

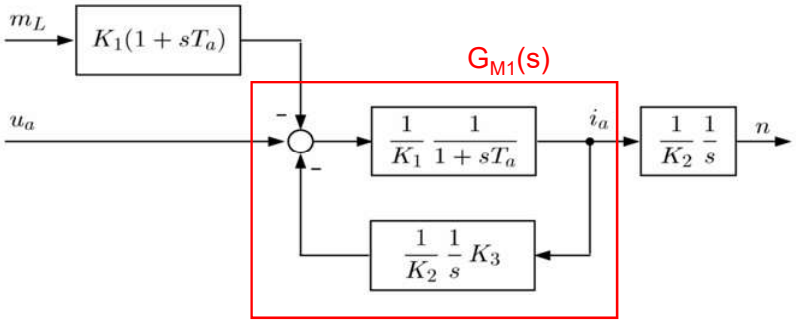
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Stromregelkreis (innerer Regelkreis)



Drehzahlregelkreis (äußerer Regelkreis)

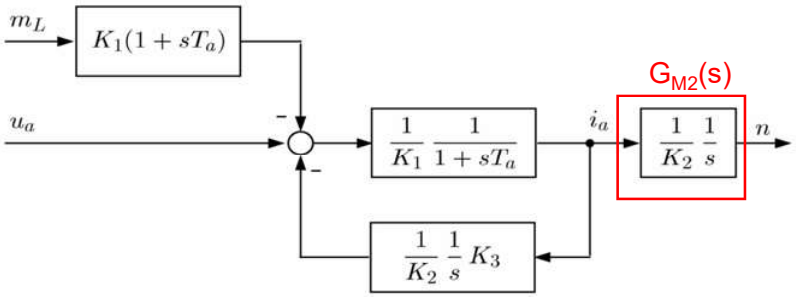
11.1 Kaskadenregelung: Übertragungsfunktionen



$$G_{M1}(s) = \frac{i_a(s)}{u_a(s)} = \frac{\frac{1}{K_1}\frac{1}{1+sT_a}}{1+\frac{1}{K_1K_2}\frac{1}{1+sT_a}\frac{K_3}{s}} = \frac{1}{K_1}\frac{\frac{K_1K_2}{K_3}s}{\frac{K_1K_2}{K_3}s(1+sT_a)+1}$$

DT$_2$ - Verhalten $$= \frac{1}{K_1}\frac{T_m s}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1} \quad \text{mit} \quad T_m = \frac{K_1K_2}{K_3}$$

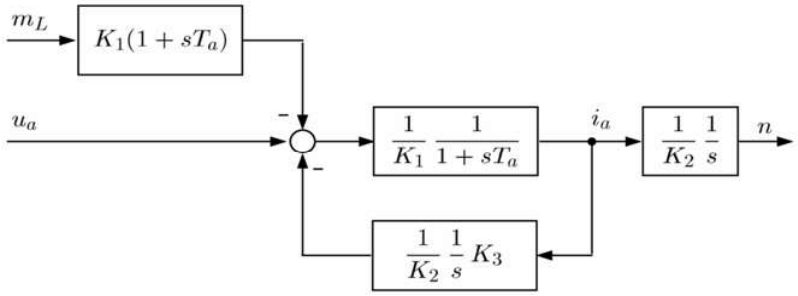
11.1 Kaskadenregelung: Übertragungsfunktionen



$$G_{M2}(s) = \frac{n(s)}{i_a(s)} = \frac{1}{sK_2}$$ I-Verhalten

11.1 Kaskadenregelung: Übertragungsfunktionen

RWTH AACHEN UNIVERSITY



$$G_{M1}(s) = \frac{i_a(s)}{u_a(s)} = \frac{1}{K_1}\frac{T_m s}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1} = \frac{1}{K_1}\frac{T_m s}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$G_{M2}(s) = \frac{n(s)}{i_a(s)} = \frac{1}{sK_2}$$

mit $T_m = \frac{K_1 K_2}{K_3}$; $T_{1/2} = \frac{T_m}{2} \pm \sqrt{\frac{T_m^2}{4} - T_m T_a} = \frac{T_m}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_a}{T_m}}\right)$

11.1 Beispiel Kaskadenregelung: Zahlenwerte

RWTH AACHEN UNIVERSITY

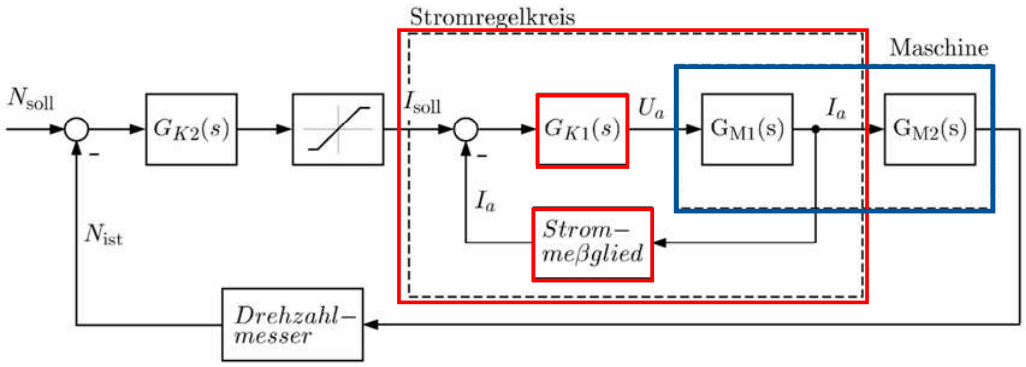
U_{aN} = 440 V	I_{aN} = 320 A	N_N = 625 min^{-1}
M_N = 2,073 kNm	$C\psi_0$ = 40,7 Vs	L_a = 3 mH
R_a = 0,05 Ω	J = 900 Ws^3	

T_a = 60 ms K_1 = 0,0364 K_2 = 28,42 s K_3 = 0,96

$T_m = K_1K_2/K_3$ = 1,08 s

$4T_a/T_m << 1 \Rightarrow$ reelles Polpaar $\Rightarrow$ T_1 = 1,016 s; T_2 = 0,064 s

11.1 Kaskadenregelung: Übertragungsfunktionen

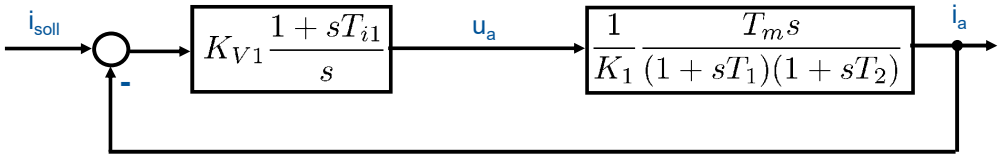


$$G_{M1}(s) = \frac{i_a(s)}{u_a(s)} = \frac{1}{K_1} \frac{T_m s}{T_a T_m s^2 + T_m s + 1} = \frac{1}{K_1} \frac{T_m s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

mit $K_1 = 0{,}0364$; $T_a = 60\ ms$; $T_m = 1{,}08\ s$; $T_1 = 1{,}016\ s$; $T_2 = 0{,}064\ s$

11.1 Kaskadenregelung: Stromregelkreis

- Aufgabe 1: Wählen Sie einen PI-Regler für den inneren Regelkreis



- Postuliere: Stationärer Fehler < 5 %

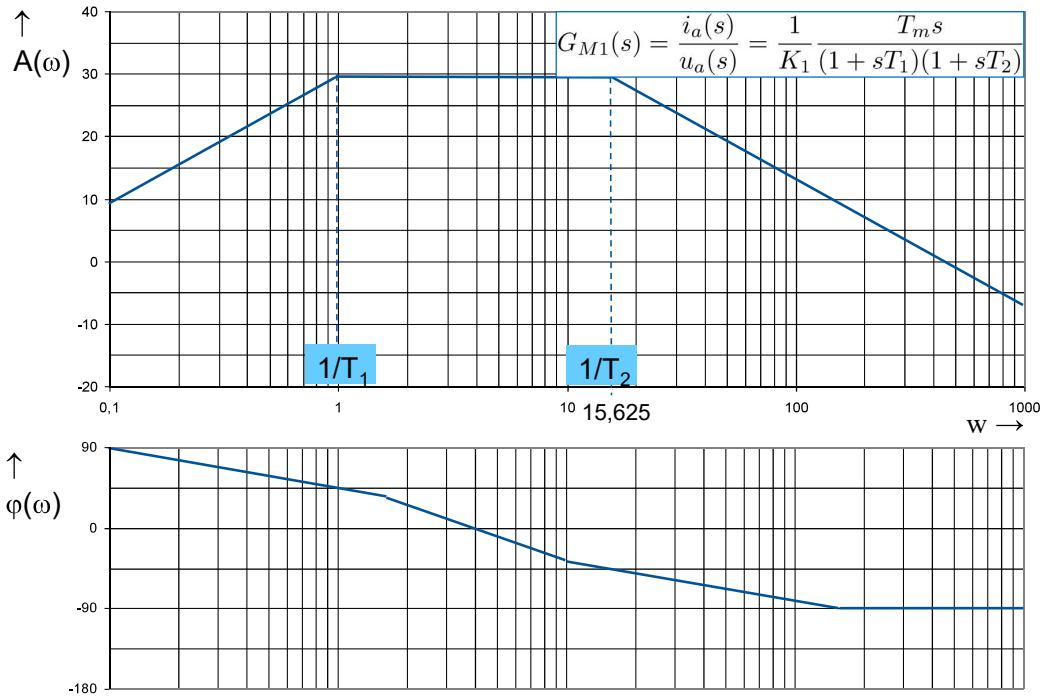
$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_{V1} \frac{T_m}{K_1}} \leq 0{,}05 \quad \rightarrow \quad K_{V1} = 19 \frac{K_1}{T_m} = 0{,}6404\ s^{-1}$$

$$20\ log(K_{V1}) = -3{,}87\ dB$$

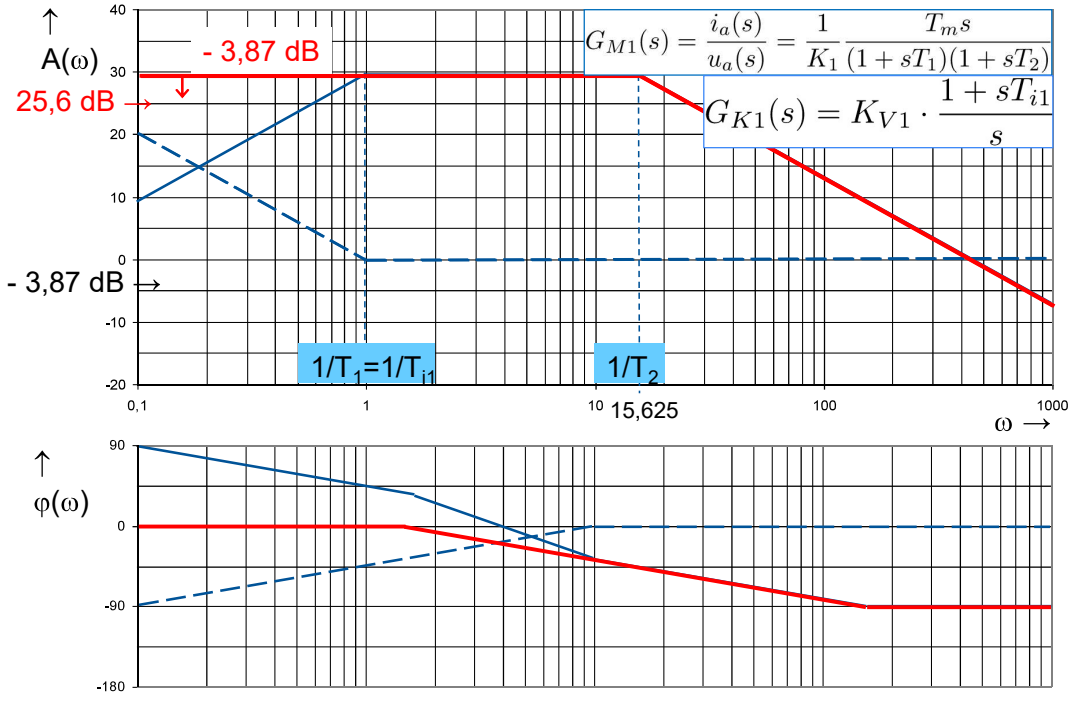
- Beachte: $\frac{T_m}{K_1} = \frac{1{,}08}{0{,}0364} = 29{,}67$

$$20\ log(\frac{T_m}{K_1}) = 29{,}446\ dB$$

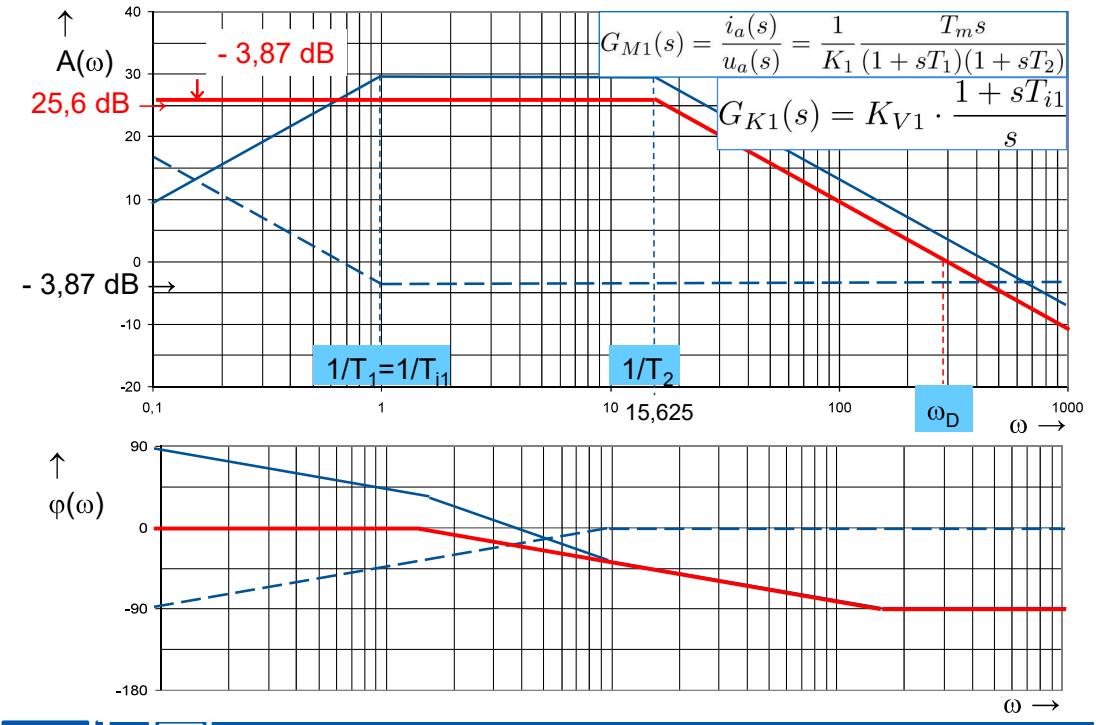
11.1 Bode-Diagramm PI-Stromregler



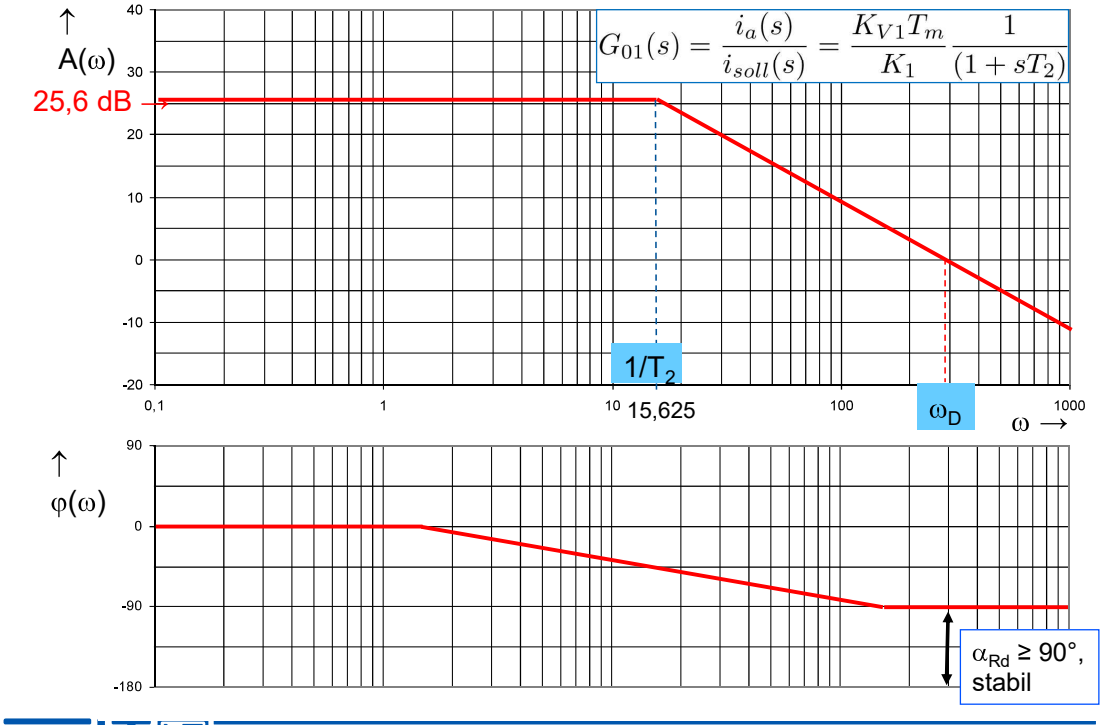
11.1 Bode-Diagramm PI-Stromregler



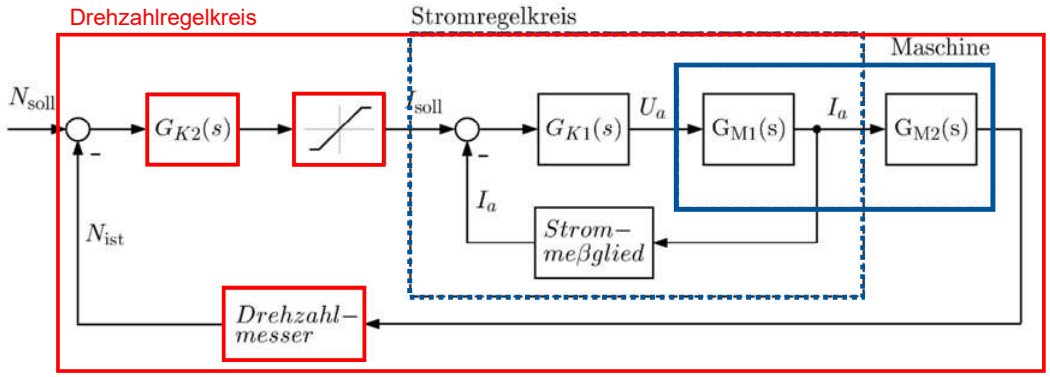
11.1 Bode-Diagramm PI-Stromregler



11.1 Bode-Diagramm PI-Stromregler



11.1 Kaskadenregelung: Übertragungsfunktionen



$$G_{01}(s) = \frac{K_S}{1+sT_2};\ \text{mit}\ K_S = \frac{K_{V1}T_m}{K_1} = 19;\ T_2 = 0,064\,\text{s}$$

Übertragungsfunktion des geschlossenen Stromregelkreises $G_S(s)$

$$G_S(s) = \frac{i_a(s)}{i_{soll}(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{\frac{K_S}{1+sT_2}}{1+\frac{K_S}{1+sT_2}} = \frac{\frac{K_S}{1+K_S}}{1+s\frac{T_2}{1+K_S}} = \frac{\frac{K_S}{1+K_S}}{1+sT_S}$$

11.1 Kaskadenregelung: Drehzahlregelkreis

- Stromregelkreis

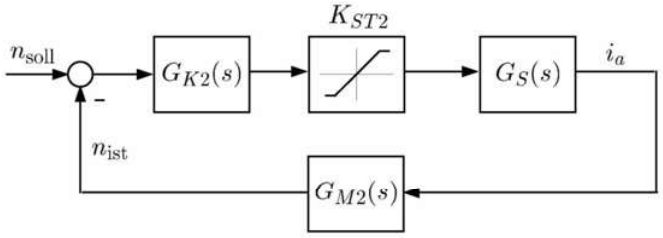
$$G_S(s) = \frac{K_S}{1+K_S}\cdot\frac{1}{1+sT_S};\ \text{mit}\ K_S = 19;\ T_S = \frac{T_2}{1+K_s} = 3,2\,\text{ms}$$

- Aufgabe 2: legen Sie nun auch den äußeren Regelkreis mit einem PI-Regler aus

$$G_{K2}(s)\cdot K_{ST2} = K_{V2}\frac{1+T_{i2}}{s}$$

  - Hinweis: vernachlässigen Sie die Übertragungsfunktion des Drehzahlmessers und zunächst auch die Stellgrößenbegrenzung

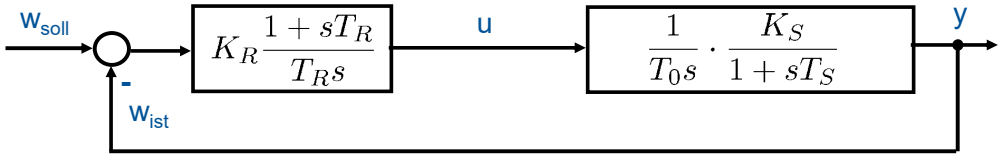
$$\Rightarrow\ G_{M2}(s) = \frac{n_{ist}(s)}{i_a(s)} = \frac{1}{sK_2};\ \text{mit}\ K_2 = 28,42\text{s}$$



Auslegung: ω_D = 0,1 x $1/T_S$
→ der Pol $1/T_S$ verliert seinen Einfluß
→ Wähle: $1/T_{i2}$ = 0,1 ω_D (Symmetrisches Optimum)

11.1 Exkurs: Symmetrisches Optimum

- Prinzip des Verfahrens: Enthält die Regelstrecke ein integrales Übertragungselement und ein Verzögerungsglied mit der Zeitkonstanten T_S, so ist eine Kompensation der Zeitkonstanten durch einen (idealen) PI-Regler **nicht zulässig!**
  - *Weitere Einschränkung der Anwendung einer Kompensation*
- Begründung: sei $G_S(s) = \frac{1}{T_0 s}\frac{K_S}{1+sT_S}$ ein IT_1-Glied und $G_{R2}(s) = K_R\frac{1+sT_R}{T_R s}$ ein PI-Regler.



Dann gilt bei $T_R = T_S$: $G_0(s) = K_R\frac{1+sT_R}{T_R s}\cdot\frac{1}{T_0 s}\cdot\frac{K_S}{1+sT_S} = \frac{K_R K_S}{T_R T_0}\cdot\frac{1}{s^2}$

und

$$G_{ges}(s) = \frac{\frac{K_R K_S}{T_R T_0}}{s^2 + \frac{K_R K_S}{T_R T_0}}$$

grenzstabil, harmonische Schwingung

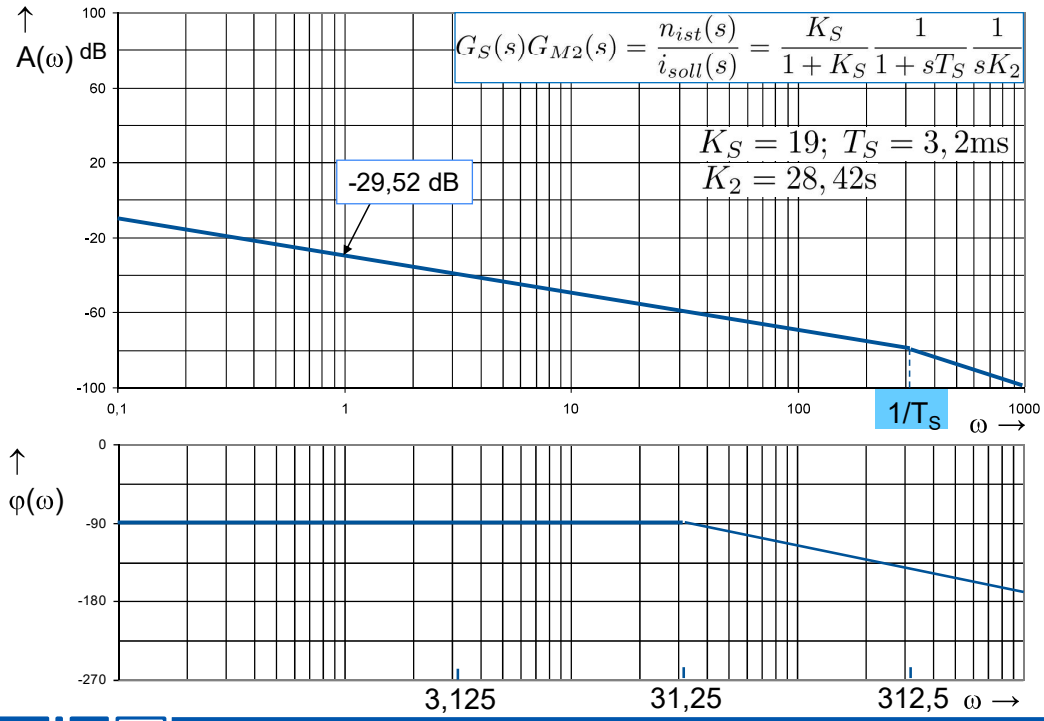
11.1 Exkurs: Symmetrisches Optimum II

- In einem solchen Fall bietet sich die Nutzung eines „realen“ PI-Reglers (siehe Kap. 10) oder die Reglerauslegung nach dem Prinzip des „symmetrischen Optimums“ an
  - Dabei wird der Regler so bemessen, dass die Durchtrittsfrequenz ω_D das geometrische Mittel der beiden Eckkreisfrequenzen $\omega_R = 1/T_R$ und $\omega_S = 1/T_S$ annimmt.
  - Durch geeignete Wahl der Regler-Nachstellzeit T_R läßt sich eine Phasenreserve einstellen, die dem Regelkreis das gewünschte Einschwingverhalten gibt.
- Für das Beispiel des IT_1-Glieds und des PI-Reglers ergibt sich als mögliche Einstellvorschrift $T_R = a^2 T_S$, $a > 1$.
  - Merke: mit der Wahl von a wird auch die Phasenreserve und das Einschwingverhalten festgelegt …
- Eine häufige Wahl ist a = 10. In diesem Fall ergibt sich für unser Beispiel

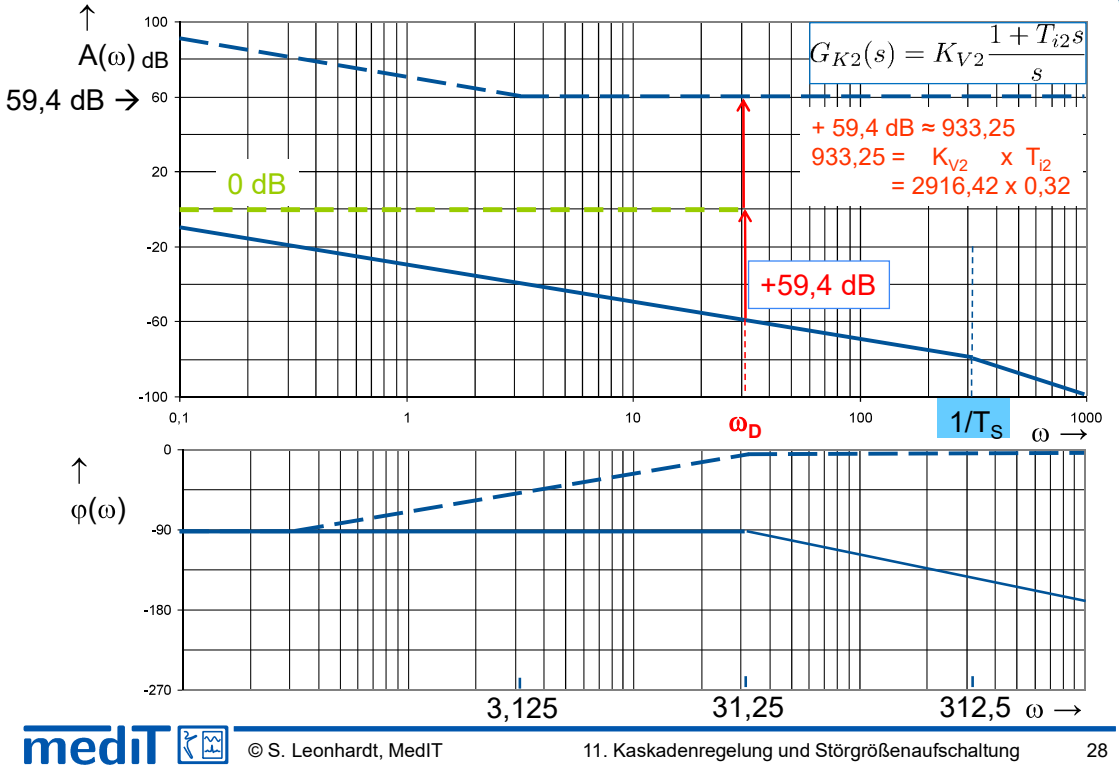
$$\omega_D = 0,1\frac{1}{T_S} = 31,25\ 1/sec \quad \text{und} \quad \frac{1}{T_R} \stackrel{!}{=} \frac{1}{T_{i2}} = 0,1\omega_D = 3,125\ 1/sec$$

- Zurück zum Problem der Drehzahlregelung …

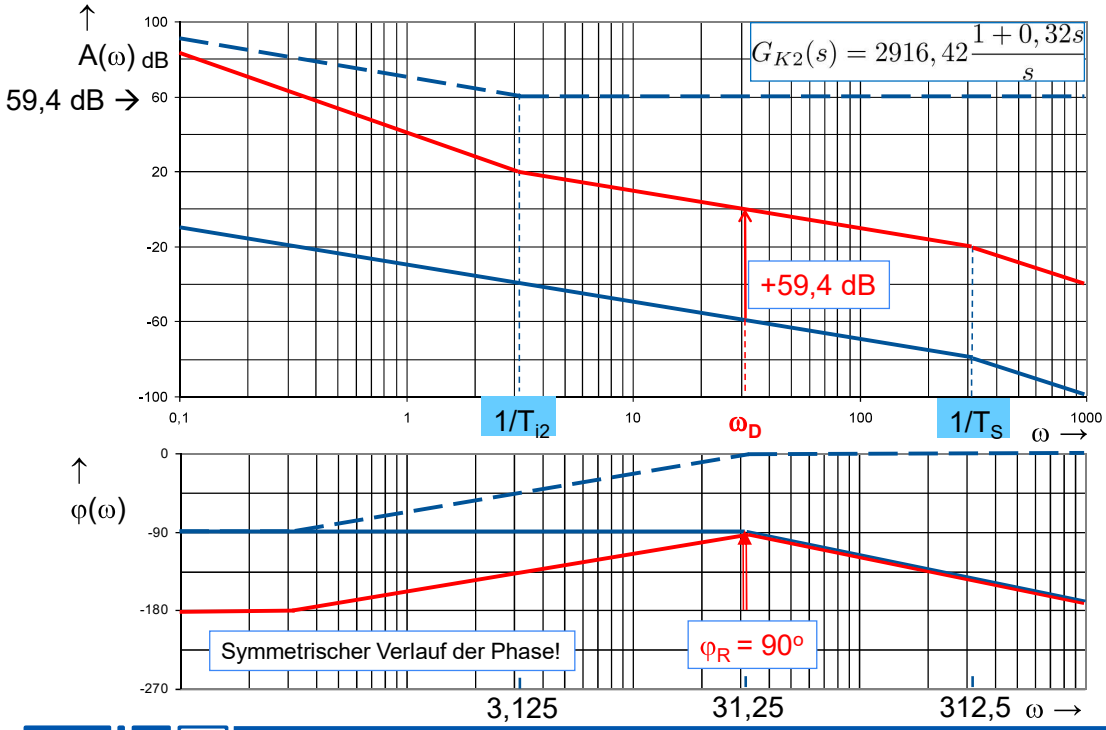
11.1 Bode-Diagramm Drehzahlregler



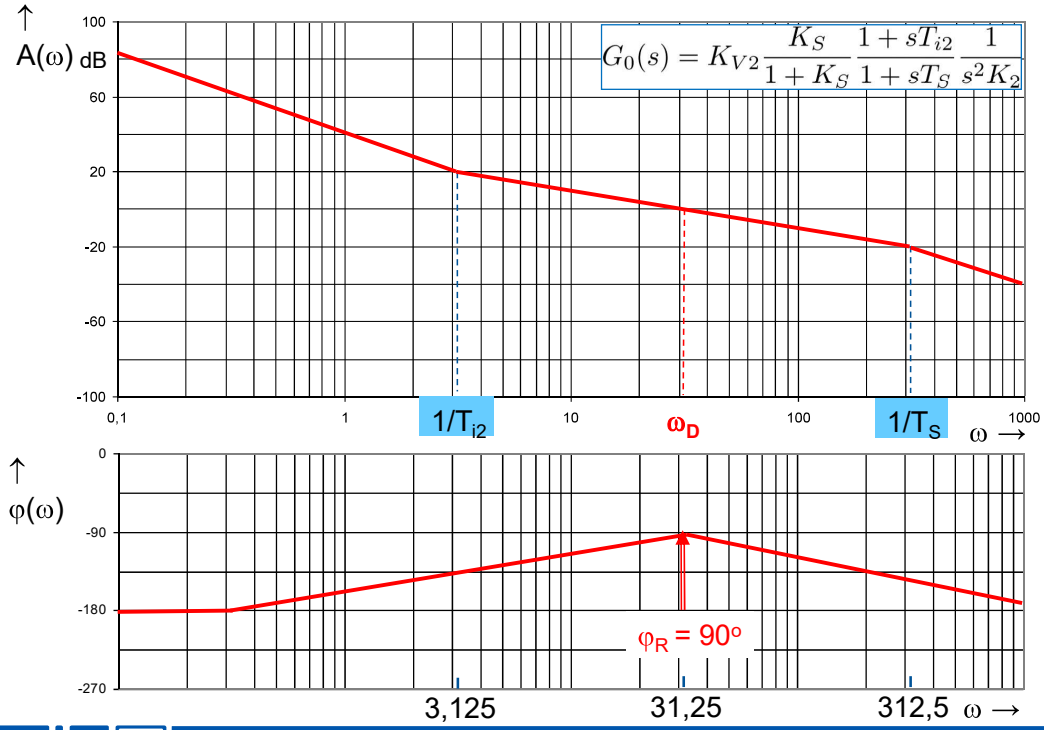
11.1 Bode-Diagramm Drehzahlregler



11.1 Bode-Diagramm Drehzahlregler



11.1 Bode-Diagramm Drehzahlregler



11.1 Kaskadenregelung

Übertragungsfunktion der Kaskadenregelung (jetzt mit K_{ST2})

$$G_{ges}(s) = \frac{n_{ist}(s)}{n_{soll}(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{K_{V2}K_{ST2}\frac{K_S}{1+K_S}\frac{1+sT_{i2}}{1+sT_S}\frac{1}{s^2K_2}}{1+K_{V2}K_{ST2}\frac{K_S}{1+K_S}\frac{1+sT_{i2}}{1+sT_S}\frac{1}{s^2K_2}}$$

$$= \frac{K_{V2}K_{ST2}\frac{K_S}{1+K_S}(1+sT_{i2})\frac{1}{K_2T_S}}{s^3+\frac{1}{T_S}s^2+\frac{K_{V2}K_{ST2}K_S}{K_2T_S(1+K_S)}T_{i2}s+\frac{K_{V2}K_{ST2}K_S}{K_2T_S(1+K_S)}}$$

$$= \frac{K_{V2}K_{ST2}\frac{K_S}{1+K_S}(1+sT_{i2})\frac{1}{K_2T_S}}{\left(s+\frac{1}{T_{D1}}\right)\left(s+\frac{1}{T_{D2}}\right)\left(s+\frac{1}{T_{D3}}\right)}$$

Durch Einsetzen der Werte ergeben sich für die drei Zeitkonstanten folgende Werte:

→ T_{D1} = 284 ms , T_{D2} = 32 ms , T_{D3} = 3,6 ms

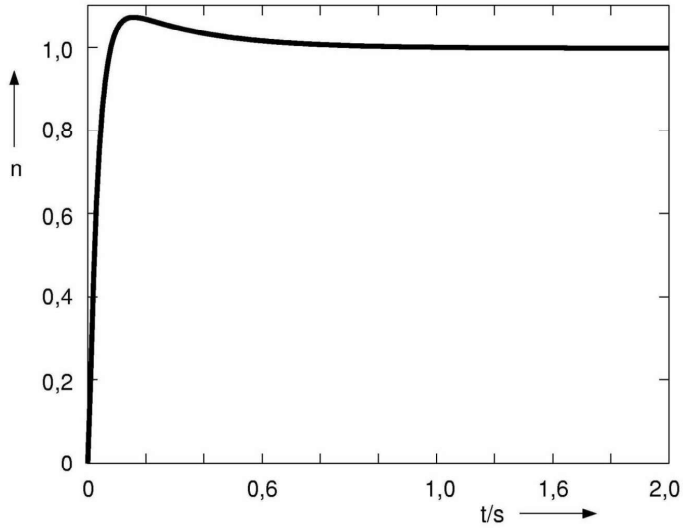
⇕ ⇕

→ T_{i2} = 320 ms , $1/\omega_D$= 32 ms

T_{D3} zu klein, T_{D1} wird durch den Regler mehr oder weniger kompensiert → wie gewünscht dominiert $T_{D2} = 1/\omega_D$ das dynamische Geschehen

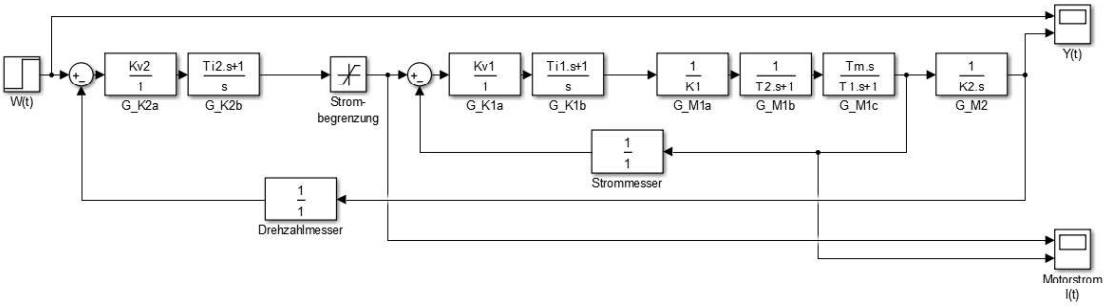
11.1 Kaskadenregelung

Sprungantwort der Kaskade ohne Strombegrenzung (Sollwertsprung der Nenndrehzahl)



Überschwingen von 8 %

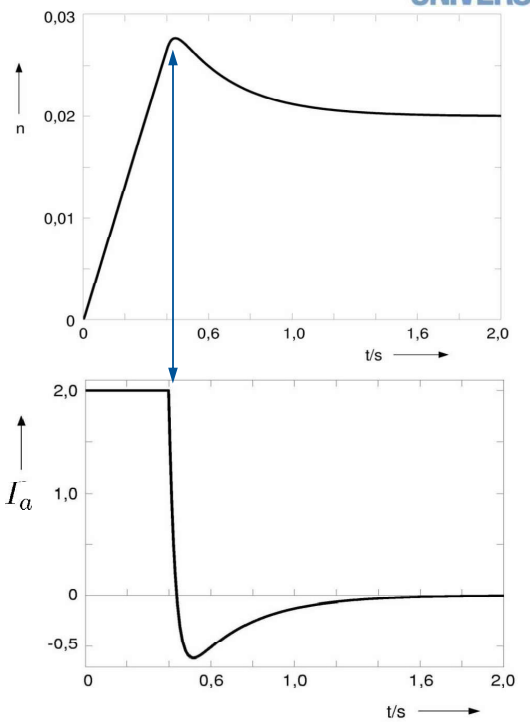
Demonstration: Simulink-Modell „kaskadenregelung.slx“



11.1 Kaskadenregelung: Beispiel

Beispiel:

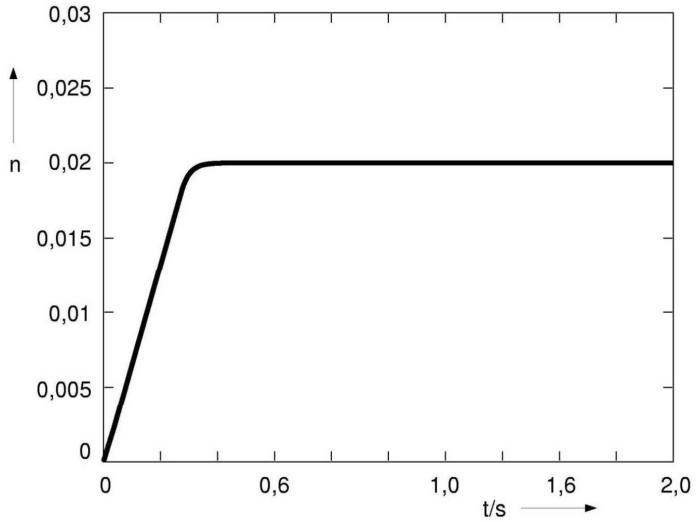
- Sollwertsprung von 2% der Nenndrehzahl (mit Strombegrenzung.
- Drehzahlverlauf der Kaskade:
- Zugehöriger Verlauf des Ankerstroms:



11.1 Kaskadenregelung: Beispiel

Ersetzen des PI-Reglers durch einen P-Regler während der Begrenzungsphase

- Reaktion der Kaskade auf einen Sollwertsprung:



11.1 Kaskadenregelung

Wichtigste Merkmale der Kaskadenregelung

- Vereinfachung des Reglerentwurfs: bei komplizierteren Regelstrecken kann es schwierig sein, einen Regler für eine einschleifige Regelung zu entwerfen. Durch die Kaskadierung wird es möglich, das Problem in mehreren Schritten mit jeweils einfachen PI-Reglern zu lösen.
- Schnellere Ausregelung von Störgrößen im Inneren der Strecke
- Begrenzung der Zwischengrößen durch Sollwertbegrenzung leicht möglich
- Abschnittsweise In-Betriebnahme der Regelung
- Eingrenzung des Einflusses von Nichtlinearitäten – der Stromregelkreis im Inneren ist linear!

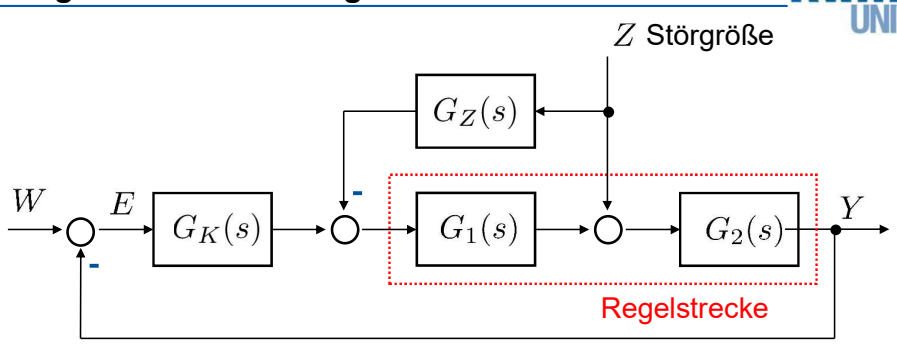
Gliederung

11.1 Kaskadenregelung: Kombination innerer und äußerer Regelung
- Grundprinzip
- Dimensionierung
- Beispiel

11.2 Störgrößenaufschaltung
- **Verbesserung der Regelung durch Messung der Störgröße (falls die Störgröße messbar ist)**

11.3 Zusammenfassung und Hausaufgabe

11.2 Störgrößenaufschaltung



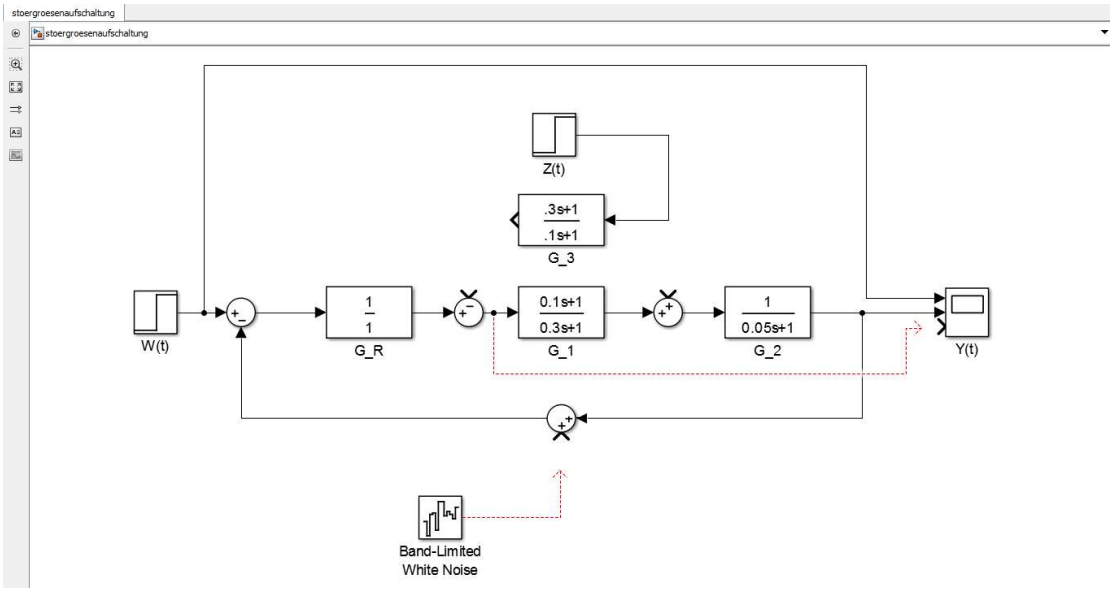
Kompensation der Störgröße Z durch Vorkorrektur:

$$-Z(s)G_Z(s)G_1(s) + Z(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; Z(s)[1 - G_Z(s)G_1(s)] = 0$$

$$\Rightarrow\; G_Z(s) = \frac{1}{G_1(s)}$$

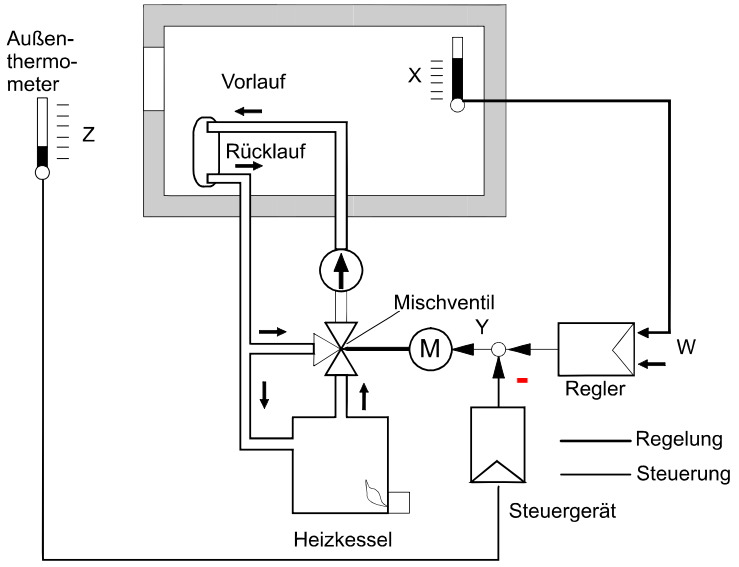
Bemerkungen:
- Störgröße muss messbar sein
- $G_1(s)$ muss invertierbar sein
- Fehler in Bestimmung von $G_1(s)$ verursacht Resteinfluss der Störgröße

Simulink-Modell „Strögrößenauschaltung.slx“



11.2 Beispiel

Störgrößenaufschaltung bei Raumtemperaturregelung



Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

11.1 Kaskadenregelung: Kombination innerer und äußerer Regelung
- Grundprinzip
- Dimensionierung
- Beispiel

11.2 Störgrößenaufschaltung
- Verbesserung der Regelung durch Messung der Störgröße (falls die Störgröße messbar ist)

11.3 Zusammenfassung und Hausaufgabe

Zusammenfassung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

- System eher zu schnell -> Lag-Element
- System eher zu langsam -> Lead-Element
- Kochrezepte sollte man üben
  - Lag: PS / NS links von Durchtrittsfrequenz, K, α
  - Lead: PS / NS um die Durchtrittsfrequenz (etwas aufwendiger, K, α, Tabelle)
- PID kann alles

- Vorteile der Kaskadenregelung (Einfache Auslegung, Störungen propagieren nicht, Linearisierung, schrittweise Inbetriebnahme,…)

- Störgrößenaufschaltung: System muss (annähernd) bekannt und invertierbar sein, dann kann der Einfluss der Störung stark reduziert werden.

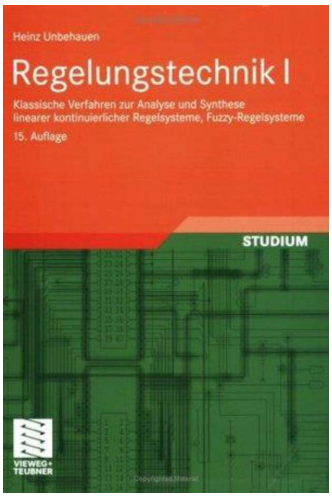
11.3 Hausaufgabe

Hausaufgabe:

- Lesen Sie dieses Kapitel im Skript …

Zum Weiterlesen:

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
  - Lesen Sie Kap. 8.6



12. Das Wurzelortskurvenverfahren

RWTH AACHEN UNIVERSITY

mediT

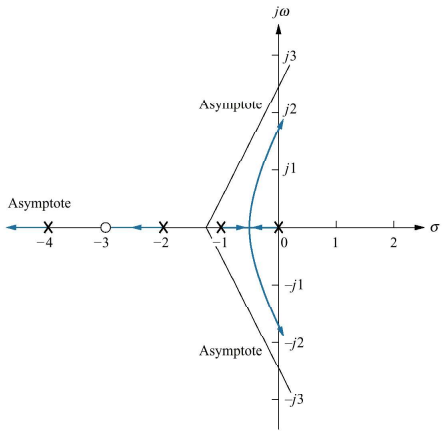
Systemtheorie 1

Prof. Dr.-Ing. Dr. med. S. Leonhardt

Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

12.1 Einleitung
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve
12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve
12.4 Regeln zur Erstellung einer Wurzelortskurve
12.5 Beispiele
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung
12.7 Hausaufgaben



12.1 Einführung

Gegeben sei die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke (Prozess, $G_p(s)$)

- Wir wissen: $G_p(s)$ kann stabil, grenzstabil oder instabil sein
- Beachte: Im offenen Regelkreis sind die Pole von $G_p(s)$ keine Funktion etwaiger Reglereinstellungen $G_R(s)$

Was ändert sich bei der Schließung des Regelkreises?

- Das Schließen des Regelkreises erlaubt
  - **die Stabilisierung instabiler Systeme**
  - **die Gestaltung des Übergangverhaltens** (schnellere Systemantwort, Vermeidung einer bleibenden Regelabweichung, etc.)
  - das Ausregeln von **Störungen**
- Aber: die Pole ändern sich oft mit der Systemverstärkung K
  - eine **ungünstige Reglereinstellung** kann eine **schlechte Systemdynamik** oder sogar **Instabilität des geschlossenen Regelkreises** induzieren.

→ Das Wurzelortskurvenverfahren erlaubt, die **Lage der Pole** als **Funktion eines Einstellparameters,** insb. der **Reglerverstärkung K**, zu beurteilen.

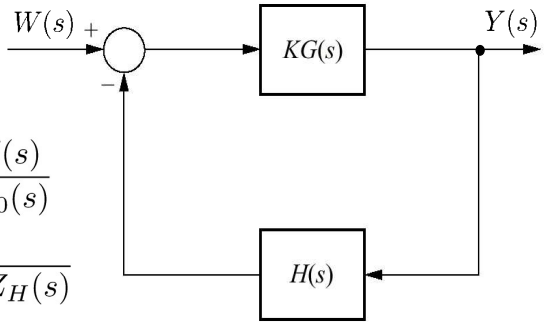
12.1 Einführung II

Gegeben sei der folgende Regelkreis

- Die Reglerverstärkung K
- Die Regelstrecke $G(s) = Z_p(s)/N_p(s)$
- Die Rückübertragungsfunktion $H(s) = Z_H(s)/N_H(s)$

Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises $G_{ges}(s)$:

$$\frac{\text{Vorwärtsübertragungsfunktion}}{1 + \text{Schleifenübertragungsfunktion}}$$



$$G_{ges}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s) \cdot H(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + G_0(s)}$$
$$= \frac{K \cdot Z_p(s) \cdot N_H(s)}{N_p(s) \cdot N_H(s) + K \cdot Z_p(s) \cdot Z_H(s)}$$

Beachte:

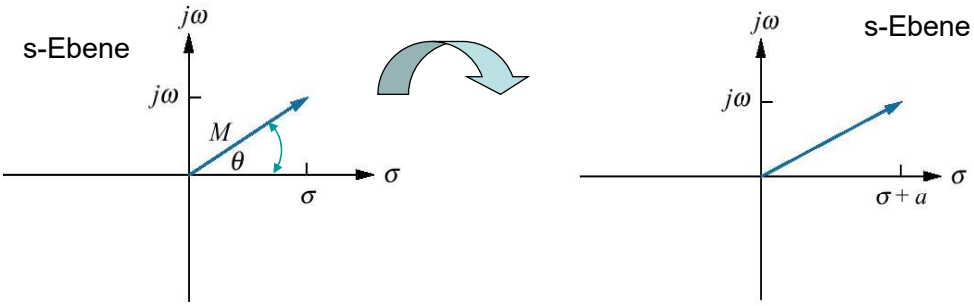
- Das charakteristische Polynom $1 + G_0(s)$ ist offensichtlich eine Funktion von K …
- Aber wo genau liegen die Pole? Für welche Verstärkung ist das Gesamtsystem stabil?

12.1 Vektordarstellung von komplexen Zahlen

Wir erinnern uns:

- Eine komplexe Zahl $s = \sigma + j\omega$, die in **kartesischen Koordinaten** gegeben ist, lässt sich grafisch als **Vektor** darstellen
- Sie kann auch in **Polar-Koordinaten** dargestellt werden. Dabei ist M die Länge (**Magnitude**) und θ der **Phasenwinkel** gegen die reelle Achse $s = M\angle\theta$
- Jede komplexe Funktion $F(s)$ bildet eine komplexe Zahl s auf eine andere komplexe Zahl ab

Beispiel: Betrachte $F(s) = s + a$ mit a einer reellen Zahl. Diese Funktion bildet $s = \sigma + j\omega$ ab auf $F(s) = (\sigma + a) + j\omega$.



12.1 Vektordarstellung von komplexen Zahlen II

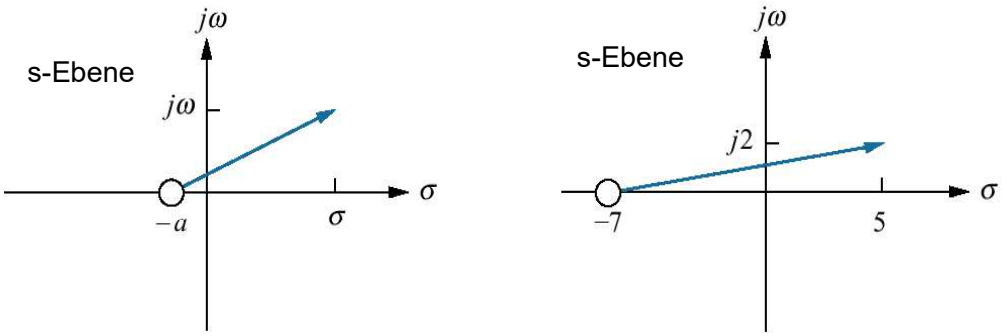
Alternative Darstellung:

- Wir beachten, dass $F(s)$ eine Nullstelle bei s = -a hat
- Insofern lässt sich die Abbildung $F(s)$ auch darstellen als Vektor, der bei s = - a beginnt und bei s endet …

Zusammenfassung:

- $F(s)$ ist ebenfalls eine komplexe Zahl
- Diese kann dargestellt werden als Vektor von der Nullstelle $F(s)$ = 0 bis s

Beispiel: $F(s) = (s+7)|_{s\to 5+j2}$



12.1 Vektordarstellung von komplexen Zahlen III

Jedes gebrochen-rationale Polynom $F(s)$ lässt sich entsprechend darstellen als

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - s_{N,i})}{\prod_{j=1}^{n} (s - s_{P,j})} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \text{Zähler-Faktoren}}{\prod_{j=1}^{n} \text{Nenner-Faktoren}}$$

Da jede komplexe Zahl durch eine Amplitude M und einen Phasenwinkel θ dargestellt werden kann, erhält man in Summe $F(s) = M \angle \theta$ mit

$$M = \frac{\prod \text{Abstände zu den Nullstellen}}{\prod \text{Abstände zu den Polstellen}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |(s - s_{N,i})|}{\prod_{j=1}^{n} |(s - s_{P,j})|}$$

und

$$\theta = \sum \text{Nullstellen-Winkel} - \sum \text{Polstellen-Winkel} = \sum_{i=1}^{m} \angle(s - s_{N,i}) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s - s_{P,j})$$

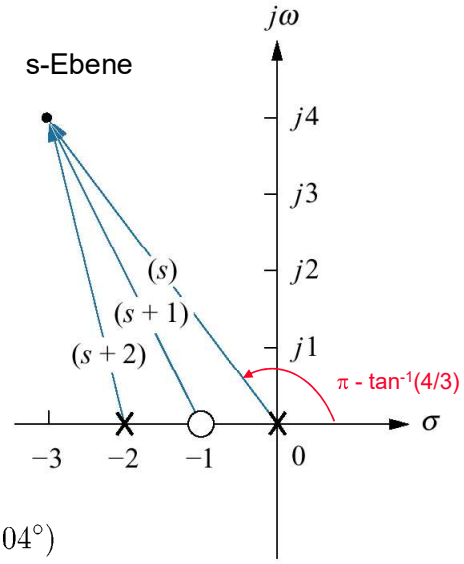
12.1 Vektordarstellung von komplexen Zahlen IV

Beispiel: Gegeben sei $F(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)}$.

Man bestimme $F(s)$ für s = -3 +4j.

Lösung:

- Vektor von Nullstelle s = -1 bis -3 +4j:
  $M = \sqrt{20}, \theta = \pi - \tan^{-1}(4/2) \rightarrow \sqrt{20} \angle 116.6°$
- Vektor von Polstelle s = 0 bis -3 +4j:
  $M = \sqrt{25}, \theta = \pi - \tan^{-1}(4/3) \rightarrow 5 \angle 126.9°$
- Vektor von Polstelle s = -2 bis -3 +4j:
  $M = \sqrt{17}, \theta = \pi - \tan^{-1}(4/1) \rightarrow \sqrt{17} \angle 104°$



o Symbol für Nullstelle
x Symbol für Pol

$$\Rightarrow \quad F(s) = M \angle\theta = \frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{17}} \angle(116.6° - 126.9° - 104°)$$
$$= 0.217 \angle(-114.3°)$$

Gliederung

12.1 Einleitung
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve
12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve
12.4 Regeln zur Erstellung einer Wurzelortskurve
12.5 Beispiele
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung
12.7 Hausaufgaben

12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve

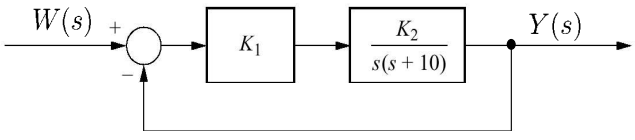
Idee der "Wurzelortskurve":

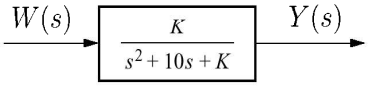
- (engl. "*Root Locus Technique*", von lat. *locus* = " der Ort")
- Analyse und Entwurf eines Parameters (z.B. der Reglerverstärkung K), um ein gewünschtes Systemverhalten zu bekommen

Beispiel:

- Positionsverfolgung mit einer Nachführ-Kamera (siehe Abb.)
- Sei die Gesamtverstärkung $K = K_1 K_2$
- Die Pole des geschlossenen Regelkreises verändern sich mit K

Courtesy of ParkerVision





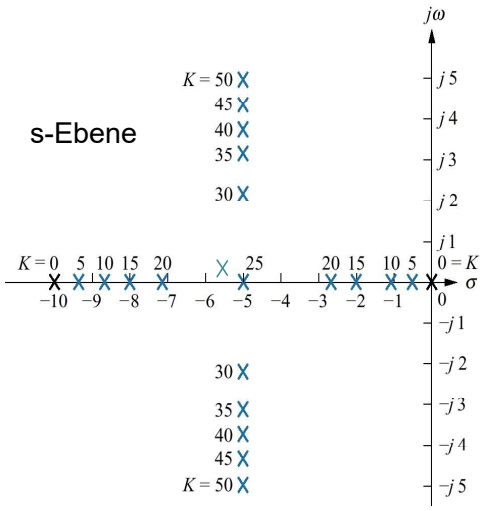
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve II

Für dieses System kann die genaue Lokalisierung der Pole durch die pq-Formel erfolgen

$$N(s) = s^2 + 10s + K \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \quad s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - K}$$

K	Pol 1	Pol 2
0	-10	0
5	-9.47	-0.53
10	-8.87	-1.13
15	-8.16	-1.84
20	-7.24	-2.76
25	-5	-5
30	$-5 + j2.24$	$-5 - j2.24$
35	$-5 + j3.16$	$-5 - j3.16$
40	$-5 + j3.87$	$-5 - j3.87$
45	$-5 + j4.47$	$-5 - j4.47$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$



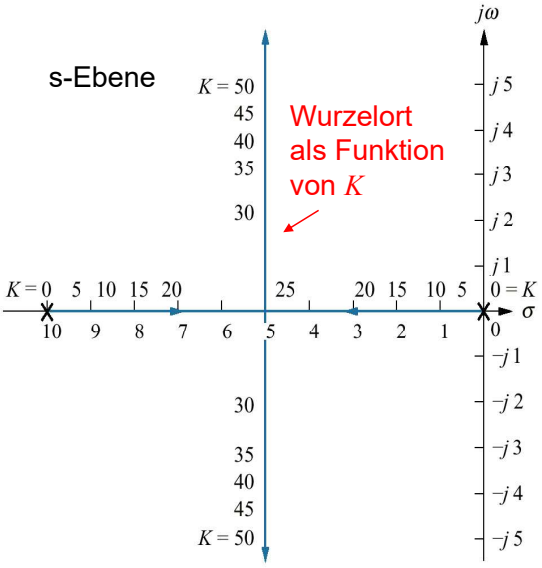
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve III

Definition der Wurzelortskurve (WOK):

- Ort der Pole des geschlossenen Regelkreises (Wurzeln des Nenners) als Funktion von K (oder eines anderen Parameters).

Beachte:

- Normalerweise wird nur $K > 0$ betrachtet.
- Die Ortskurve startet für $K = 0$ bei den Polen des offenen Regelkreises und bewegt sich in Richtung $K \rightarrow \infty$ (siehe Pfeilrichtung).
- Der Einfluss der Rückkopplung steigt mit zunehmendem K.



Gliederung

12.1 Einleitung
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve
12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve
12.4 Regeln zur Erstellung einer Wurzelortskurve
12.5 Beispiele
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung
12.7 Hausaufgaben

12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve

Ziel: Hilfen für schnelles Zeichnen der WOK

Sei die Übertragungsfunktion des rückgekoppelten Standardregelkreises eine gebrochen-rationale Funktion

$$G_{ges}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)\ H(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$\text{mit } G_0(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} |(s - s_{N,i})|}{\prod_{j=1}^{n} |(s - s_{P,j})|} \cdot e^{\sum_{i=1}^{m} \angle(s - s_{N,i}) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s - s_{P,j})}$$

- Ein Pol existiert dann und nur dann, wenn die charakteristische Gleichung eine Nullstelle hat

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 = \underbrace{1\ \angle(2k+1) \cdot 180^\circ}_{\text{-1 in Polarkoordinaten}}$$

- Daraus folgt

$$|KG(s)H(s)| = 1$$
$$\angle KG(s)H(s) = \pm(2k+1) \cdot 180^\circ$$

12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. Phasenbedingung

- Eine Polstelle des geschlossenen Regelkreises erzeugt für $G_0(s)$ ein ungerades Vielfaches von 180°. Beachte: diese Bedingung ist von K unabhängig …

$$\angle KG(s)H(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle(s - s_{N,i}) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s - s_{P,j}) = \pm(2k+1) \cdot 180°$$

2. Amplitudenbedingung

- Eine Polstelle des geschlossenen Regelkreises bedingt, dass K der reziproken Amplitude von $G_0(s)$ entspricht:

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{\prod_{j=1}^{n} |(s - s_{P,j})|}{\prod_{i=1}^{m} |(s - s_{N,i})|}$$

Demonstration: Betrachte wieder die Nachführ-Kamera

- Sei $K = 5$ und ein Pol bei $s_1 = -9{,}47$ (der andere bei $s_2 = -0{,}53$)

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s+10)} \approx \frac{5}{-5} = -1 \quad \text{q.e.d.}$$

$$G_{ges}(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

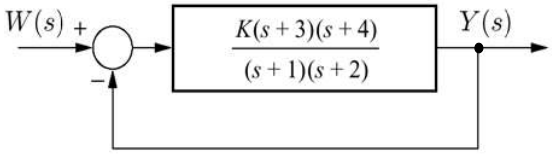
Rundungsfehler → $\approx \frac{5}{0}$ ist ein Pol

12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve III

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel:

- Gegeben ist das rechts beschriebene Regelsystem und der komplexe Punkt $s = -2 + 3j$.
- Ist dieser Punkt ein Pol?



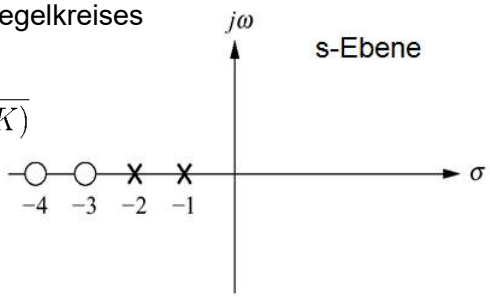
Lösung:

- Vorwärtsübertragungsfunktion

$$KG(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

- Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$G_{ges}(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2 + (3+7K)s + (2+12K)}$$



12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve IV

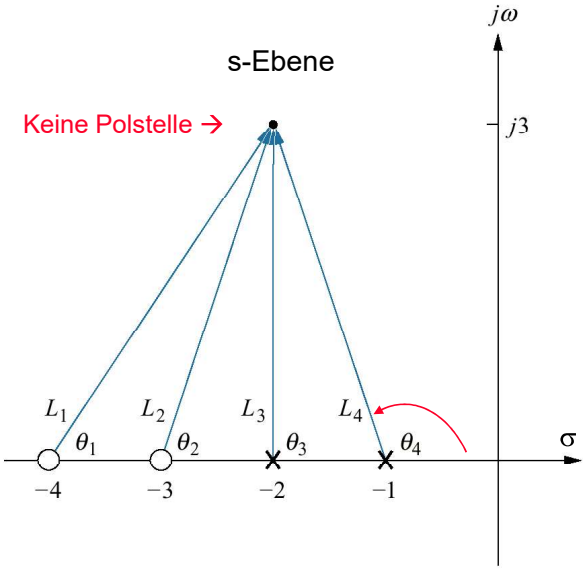
Wenn $s = -2+j\,3$ ein Pol wäre, müsste gelten:

$$|KG(s)| = 1$$
$$\angle KG(s) = (2k+1)\cdot 180^o$$

- Aus der Phasenbedingung ergibt sich

$$\begin{aligned}\angle KG(s) &= \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\ &= 56.31^\circ + 71.57^\circ - 90^\circ - 108.43^\circ \\ &= -70.55^\circ \end{aligned}$$

→ Keine Polstelle!



- Wird allerdings $s = -2 + j\,0{,}5\,\sqrt{2}$ betrachtet, so ergibt sich ein Gesamtwinkel von 180°. Dieser Ort ist damit ein Pol für

$$K = \frac{1}{|G(s)|} = \frac{1}{M} = \frac{\Pi \text{ Abstände zu den Polstellen}}{\Pi \text{ Abstände zu den Nullstellen}} = \frac{L_3 L_4}{L_1 L_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,22)}{(2,22)(1,22)} = 0,33$$

Gliederung

12.1 Einleitung
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve
12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve
12.4 Regeln zur Erstellung einer Wurzelortskurve
12.5 Beispiele
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung
12.7 Hausaufgaben

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1. **Symmetrie:** da alle Wurzeln reell oder konjugiert komplex sind, verläuft die Wurzelortskurve **symmetrisch zur reellen Achse**.

2. **Zahl der Äste:** die WOK besteht aus n **Ästen**.
   - Alle Äste **beginnen** für $K = 0$ in den **Polstellen** des offenen Regelkreises $1 + G_0(s)$.
   - m Äste **enden** für $K \rightarrow \infty$ in den **Nullstellen** des offenen Regelkreises.
   - $(n\text{-}m)$ Äste enden im Unendlichen.
   - Die Anzahl der in einer Nullstelle endenden bzw. in einer Polstelle beginnenden WOK-Äste ist gleich der Vielfachheit der Pol- bzw. Nullstelle.

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve II

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Zur Verdeutlichung:

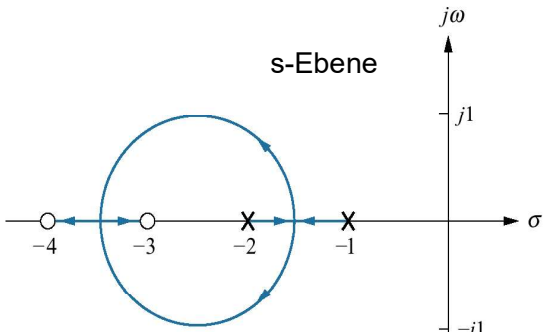
$$G_{ges}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s) \cdot H(s)} = \frac{K \cdot Z_G(s) \cdot N_H(s)}{N_G(s) \cdot N_H(s) + K \cdot Z_G(s) \cdot Z_H(s)}$$

$$\lim_{K \to 0} G_{ges}(s) = \frac{K \cdot Z_G(s) \cdot N_H(s)}{N_G(s) \cdot N_H(s)}$$

Die Polstellen sind die **Polstellen** des **offenen** Regelkreises

$$\lim_{K \to \infty} G_{ges}(s) = \frac{K \cdot Z_G(s) \cdot N_H(s)}{K \cdot Z_G(s) \cdot Z_H(s)}$$

Die Polstellen sind die **Nullstellen** des **offenen** Regelkreises



Beispiel: $G_0(s) = K\dfrac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve III

3. Die **Asymptoten** der (n-m) nach unendlich strebenden Äste der WOK sind (n-m) Geraden, die sich alle im **Wurzelschwerpunkt** (σ_a, j0) auf der reellen Achse schneiden. Für diesen gilt

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left\{\sum_{j=1}^{n} Re\ s_{P,j} - \sum_{i=1}^{m} Re\ s_{N,i}\right\}$$

Begründung:

$$G_0(s) = K \cdot \frac{(s-s_{N,1})(s-s_{N,2})\ldots(s-s_{N,m})}{(s-s_{P,1})(s-s_{P,2})\ldots(s-s_{P,n})}, \quad K>0,\ m \le n$$

$$\Rightarrow \qquad = K \cdot \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{m-1}s^{m-1} + s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}, \quad K>0,\ m \le n$$

Ausführung der Division (Polynom-Division) ergibt

$$\Rightarrow \qquad G_0(s) = K \cdot \frac{1}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \ldots}, \quad K>0,\ m \le n$$

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve IV

Setzt man dies ein in $1 + G_0(s) = 0$, so ergibt sich

$$s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \ldots + K = 0$$

Bei einem derartigen Polynom gilt bekanntlich für große Werte von s, also für $s \rightarrow \infty$ und damit für die Asymptoten der WOK, die Beziehung

$$\left(s + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m}\right)^{n-m} = 0.$$

Mit dem Vieta´schen Wurzelsatz ergibt sich außerdem für die Koeffizienten

$$a_{n-1} = -\sum_{j=1}^{n} s_{P,j} = -\sum_{j=1}^{n} Re\ s_{P,j}$$

$$b_{m-1} = -\sum_{i=1}^{m} s_{N,i} = -\sum_{i=1}^{m} Re\ s_{N,i}$$

⟶ Einsetzen und Auflösen

q.e.d.

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve V

Bei der Berechnung des Neigungswinkels θ_a der Asymptoten geht man zweckmässigerweise vom Grenzwert der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ aus

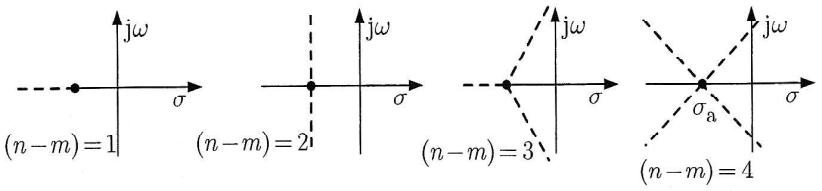
$$\lim_{s\to\infty} G_0(s) = \lim_{s\to\infty} K \cdot \frac{1}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \ldots} = \lim_{s\to\infty} K \cdot \frac{1}{s^{n-m}},$$

woraus sich als zugehörige Phasenbeziehung ableiten lässt

$$\angle G_0(s)|_{s\to\infty} = -(n-m)\ \angle s = \pm(2k+1)\cdot 180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \theta_a = \frac{\pm(2k+1)\cdot 180^\circ}{n-m}$$

Beispiele für Asymptoten-Anordnungen

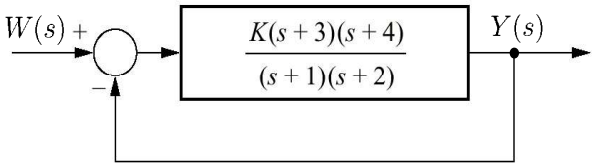


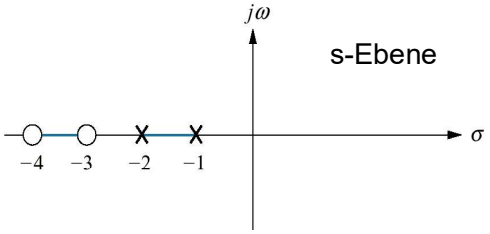
Quelle: H. Unbehauen, „Regelungstechnik I", 15. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008, p. 157

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve VI

4. **WOK-Segmente auf der reellen Achse:** Ein Punkt auf der reellen Achse gehört zur WOK, wenn die Gesamtzahl der **rechts** von diesem Punkt liegenden Pol- und Nullstellen des offenen Regelkreises **ungerade** ist.
   - Dies folgt direkt aus der Phasenbedingung, da Pol- oder Nullstellen, die links von einem betrachteten Punkt auf der reellen Achse liegen, keinen Beitrag zur Phase liefern (der jeweilige Phasenwinkel ist 0°).

Beispiel:





12.4 Überprüfung mit MATLAB

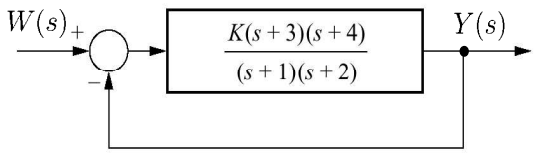
Geben Sie auf der MATLAB-Kommandoebene folgende Befehle ein:

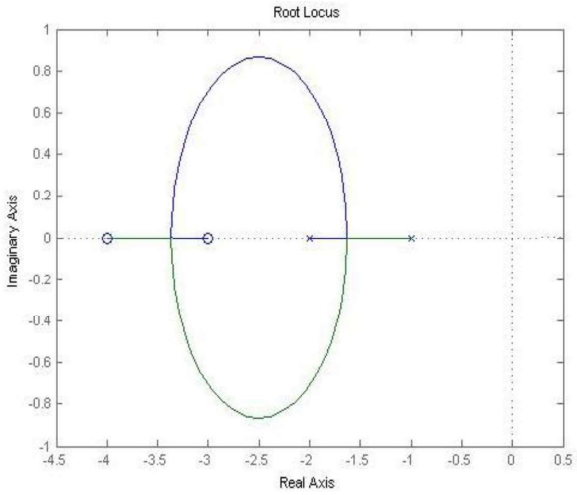
```
>> num = [1 7 12]
>> den = [1 3 2]
>> sys = tf(num,den)
>> rlocus(sys)
```

Alternativ: führen Sie den m-file RLOCUS_beispiel1.m aus …

Beachte: Die Skizze auf einer vorherigen Seite (p. 20) suggeriert einen Kreis. Ist das so?

Skalieren Sie um …





12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve VII

5. Verzweigungs- und Vereinigungspunkte:

- Liegt ein Ast der WOK zwischen zwei Polen des offenen Regelkreises auf der reellen Achse, existiert mindestens ein **Verzweigungspunkt** der WOK zwischen den beiden Polen.
- Liegt umgekehrt ein Ast der WOK zwischen zwei Nullstellen des offenen Regelkreises auf der reellen Achse, so existiert mindestens ein **Vereinigungspunkt** der WOK zwischen diesen beiden Nullstellen

Die Lage der Verzweigungs- bzw. Vereinigungspunkte erhält man als Lösung der Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s - s_{P,j}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - s_{N,i}}$$

- Sind keine Pol- oder Nullstellen vorhanden, ist der betreffende Summenterm = 0 zu setzen …

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve VIII

Begründung: Ein Verzweigungspunkt muss eine mehrfache Wurzel der charakteristischen Gleichung sein. Daher muss gleichzeitig gelten:

$$1 + G_0(s) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left[1 + G_0(s)\right] = \frac{d}{ds} G_0(s) = G_0'(s) = 0$$

Beweis?

Aus

$$G_0(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - s_{N,i})}{\prod_{j=1}^{n} (s - s_{P,j})}$$

folgt durch Logarithmieren

$$ln\ G_0(s) = ln\ K + \sum_{i=1}^{m} ln(s - s_{N,i}) - \sum_{j=1}^{n} ln(s - s_{P,j}).$$

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve IX

Nun gilt bekanntlich für den Logarithmus einer Funktion $f(s)$

$$\frac{d}{ds} ln\ f(s) = \frac{1}{f(s)} \cdot \frac{df(s)}{ds} = \frac{f'(s)}{f(s)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G_0'(s)}{G_0(s)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - s_{N,i}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s - s_{P,j}}$$

Wegen $G_0(s) = -1$ und $G_0'(s) = 0$

ergibt sich unmittelbar

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s - s_{P,j}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - s_{N,i}}}$$

q.e.d.

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve X

RWTH AACHEN UNIVERSITY

6. Austritts- und Eintrittswinkel:

Wegen

$$G_0(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} |(s - s_{N,i})|}{\prod_{j=1}^{n} |(s - s_{P,j})|} \cdot e^{\sum_{i=1}^{m} \angle(s-s_{N,i}) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s-s_{P,j})}$$

gilt für den Gesamtwinkel eines jeden Ortes der WOK aufgrund der Phasenbedingung

$$\begin{aligned} \angle G_0(s) = \theta &= \sum_{i=1}^{m} \angle(s - s_{N,i}) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s - s_{P,j}) \\ &= \pm(2k+1) \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

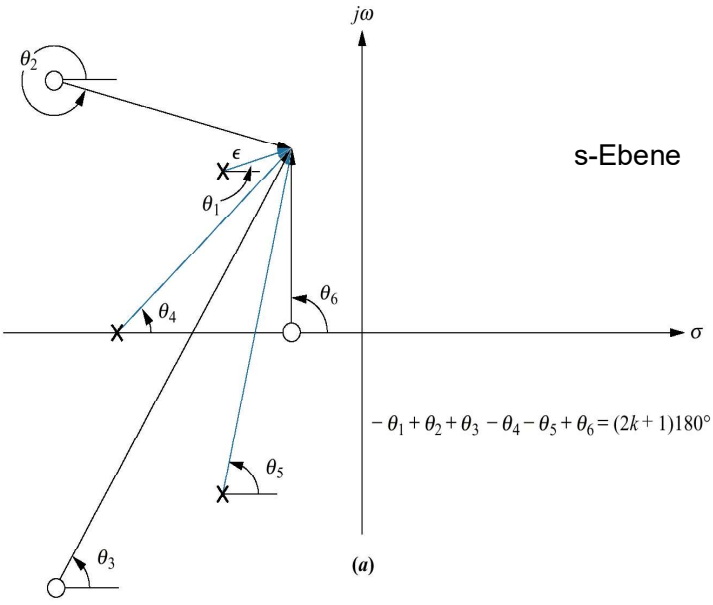
12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve XI

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Denkt man sich nun einen Punkt ε, der auf der WOK in der Nähe des Pols s_1 liegt, so gilt in jedem Fall

$$\begin{aligned} \theta(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{m} \angle(\epsilon - s_{N,i}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \angle(\epsilon - s_{P,j}) \\ &= \pm(2k+1) \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

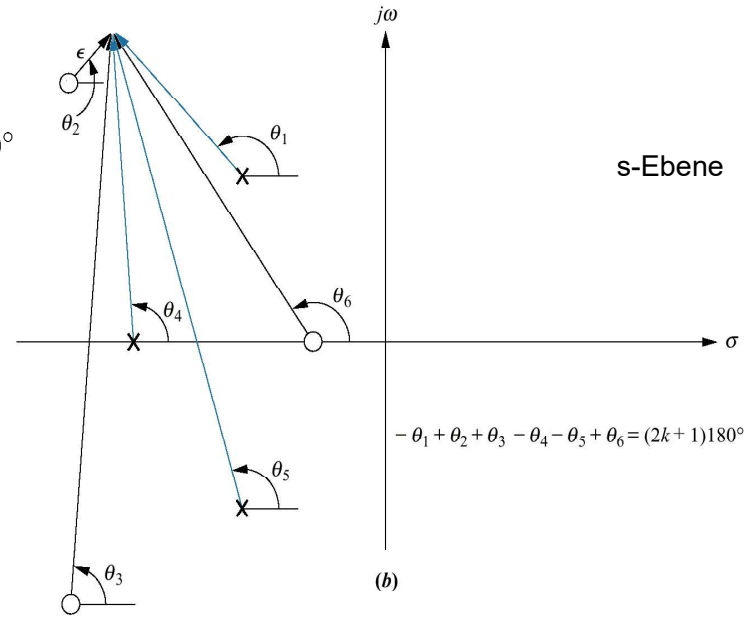
$$\rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - (2k+1) \cdot 180^\circ$$



12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve XII

Denkt man sich nun einen Punkt ε, der auf der WOK in der Nähe der Nullstelle s_2 liegt, so gilt analog

$$\theta_2 = \theta_1 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + (2k+1)\cdot 180^\circ$$



s-Ebene

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve XIII

Denkt man sich nun den Punkt ε „sehr dicht“ an einem (einfachen) Pol $s_{P,\rho}$, so ergibt sich für den **Austrittswinkel** der WOK aus diesem Pol

$$\theta_{P,\rho} = \angle(s - s_{P,\rho})|_{s=\epsilon\to s_{P,\rho}} = +\sum_{i=1}^{m}\angle(s - s_{N,i}) - \sum_{j=1,j\neq\rho}^{n}\angle(s - s_{P,j}) \pm (2k+1)\cdot 180^\circ$$

$$\text{bzw.} = \frac{1}{r_{P,\rho}}\cdot\left[+\sum_{i=1}^{m}\angle(s - s_{N,i}) - \sum_{j=1,j\neq\rho}^{n}\angle(s - s_{P,j}) \pm (2k+1)\cdot 180^\circ\right]$$

bei Vielfachheit $r_{P,\rho}$

Analog ergibt sich für den **Eintrittswinkel** in eine (einfache) Nullstelle $s_{N,\rho}$

$$\theta_{N,\rho} = \angle(s - s_{N,\rho})|_{s=\epsilon\to s_{N,\rho}} = -\sum_{i=1,i\neq\rho}^{m}\angle(s - s_{N,i}) + \sum_{j=1}^{n}\angle(s - s_{P,j}) \pm (2k+1)\cdot 180^\circ$$

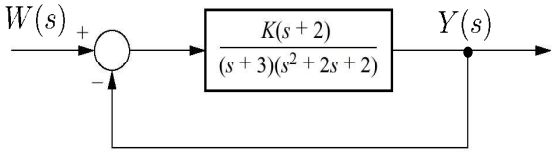
$$\text{bzw.} = \frac{1}{r_{N,\rho}}\cdot\left[-\sum_{i=1,i\neq\rho}^{m}\angle(s - s_{N,i}) + \sum_{j=1}^{n}\angle(s - s_{P,j}) \pm (2k+1)\cdot 180^\circ\right]$$

bei Vielfachheit $r_{N,\rho}$

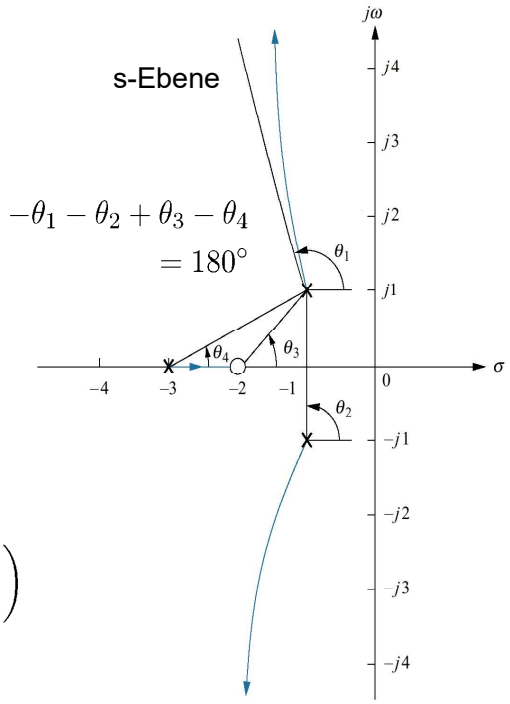
12.4 Beispiel

Aufgabe:

- Gegeben ist das System



- Bestimmen Sie den Austrittswinkel aus den konjugiert-komplexen Polen und skizzieren Sie die WOK!



Lösung:

- Wir halten zunächst fest: $s_{N1} = -2$, $s_{P1} = -3$ und $s_{P2,3} = -1 \pm j1$ und $k = 0, 1, \ldots$

$$\rightarrow \quad \theta_1 = -180° - 90° + tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -251.56° = 108.44°$$

12.4 Regeln zur Konstruktion der Wurzelortskurve XIV

7. **Stabilität:** Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn alle zu einem bestimmten K gehörenden Pole in der linken Halbebene liegen.

   → Die Stabilitätsgrenze ergibt sich an den Stellen, an denen WOK-Äste die $j\omega$ - Achse schneiden. Dort gilt grundsätzlich $1 + G_0(j\omega) = 0$.

   → Dies kann im Einzelfall umständlich zu berechnen sein

   Bestimmung der zugehörigen Systemverstärkung K ist z.B. mit dem Routh- oder dem Hurwitz-Kriterium möglich.

8. Die **Kodierung der WOK** durch die jeweilige Verstärkung ergibt sich für jeden beliebigen s-Wert direkt aus der Amplitudenbedingung. Die einzelnen Beiträge können ggf. grafisch ermittelt werden

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{\prod_{j=1}^{n} |(s - s_{P,j})|}{\prod_{i=1}^{m} |(s - s_{N,i})|}$$

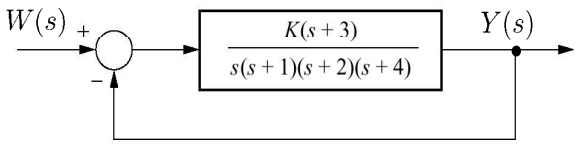
Gliederung

12.1 Einleitung
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve
12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve
12.4 Regeln zur Erstellung einer Wurzelortskurve
12.5 Beispiele
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung
12.7 Hausaufgaben

12.5 Beispiel 1

Aufgabe:

- Gegeben ist das abgebildete System. Skizzieren Sie die WOK.



Lösung:

- 4 Polstellen bei $s = 0,-1,-2$ und -4, des weiteren 1 Nullstelle bei $s = -3$

Nach Regel 1: Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse.

Nach Regel 2: Die WOK besteht aus $n = 4$ **Ästen**.

- Alle 4 Äste beginnen für $K = 0$ in den Polstellen des offenen Regelkreises $1 + G_0(s)$.
- 1 Ast endet für $K \rightarrow \infty$ in der Nullstelle $s_N = -3$ des offenen Regelkreises.
- n-$m = 3$ Äste enden im Unendlichen.
- Es gibt keine Mehrfach-Pol- oder –Nullstellen

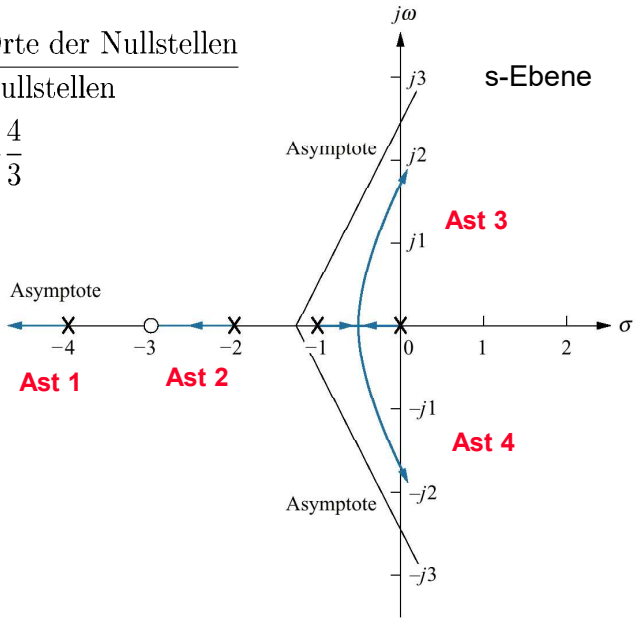
12.5 Beispiel 1

Bestimmung der Asymptoten: Nach Regel 3 ergibt sich für den Wurzelschwerpunkt

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Orte der Polstellen} - \sum \text{Orte der Nullstellen}}{\#\text{ Polstellen} - \#\text{ Nullstellen}} = \frac{(-0-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\pi}{\#\text{ Polstellen} - \#\text{ Nullstellen}}$$

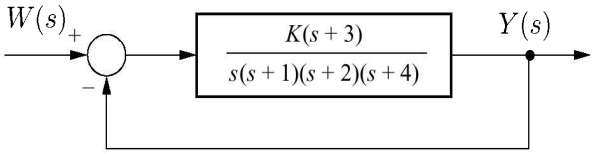
$$= \frac{\pi}{3} \quad \text{for k} = 0$$
$$= \pi \quad \text{for k} = 1$$
$$= \frac{5\pi}{3} \quad \text{for k} = 2$$



12.5 Beispiel 1

Bestimmung der Stabilitätsgrenze nach Regel 7 durch Routh-Kriterium

- Schnittpunkte mit der $j\omega$-Achse bestimmen



Das zugehörige gerade Polynom ist

$$-K^2 - 65K + 720 = 0$$
$$\rightarrow \quad K = 9.6456$$

Der Regelkreis ist stabil für

$$0 < K < 9.6456$$

Gerades Polynom verwenden

$$(90-K)s^2 + 21K$$
$$= 80.35s^2 + 202.7 \equiv 0$$
$$\rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j1.59$$

$$G_{ges}(s) = \frac{K \cdot (s+3)}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+K)s + 3K}$$

s^4	1	14	$3K$
s^3	7	$8+K$	
s^2	$90-K$	$21K$	
s^1	$\frac{K^2 \quad 65K + 720}{90-K}$		
s^0	$21K$		

12.5 Überprüfung mit MATLAB

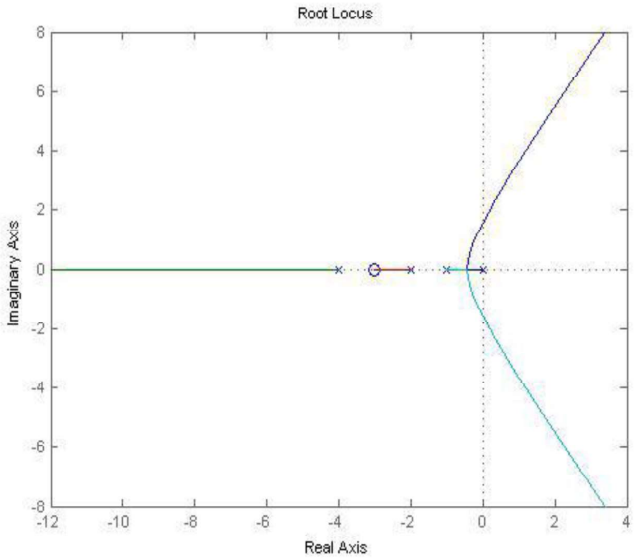
Geben Sie auf der MATLAB-Kommandoebene folgende Befehle ein

```
>> num = [1 3]
>> den = [1 7 14 8 0]
>> sys = tf(num,den)
>> rlocus(sys)
```

Alternativ: Führen Sie den m-File RLOCUS_beispiel2.m aus

Beachte: Alle WOK-Äste werden von *MATLAB* farbig kodiert …

Zur Übung: Klicken Sie auf einen Ast der WOK in der *MATLAB figure*.
Was passiert?



12.5 Beispiel 2

Gegeben sei

$$KG(s)H(s) = K \cdot \frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)} = K \cdot \frac{s^2 - 8s + 15}{s^2 + 3s + 2}$$

Aufgabe:

- Man finde die Verzweigungs- und Vereinigungspunkte ausschließlich mit Hilfe der Differentialrechnung! (als Nachtrag zu Regel 5 (Verzweigungs- und Vereinigungspunkte))

Lösung:

- Für alle Punkte auf der WOK gilt $KG(s)H(s) = -1$. Zusätzlich gilt für Wurzelorte auf der reellen Achse $s = \sigma$.

$$K \cdot \frac{\sigma^2 - 8\sigma + 15}{\sigma^2 + 3\sigma + 2} = -1 \quad \Rightarrow \quad K(\sigma) = -\frac{\sigma^2 + 3\sigma + 2}{\sigma^2 - 8\sigma + 15}$$

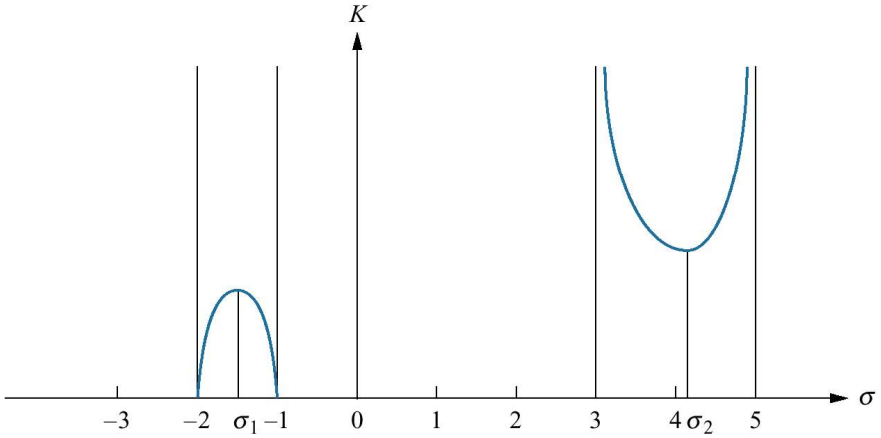
$$\frac{dK(\sigma)}{d\sigma} = \frac{11\sigma^2 - 26\sigma - 61}{(\sigma^2 - 8\sigma + 15)^2} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = -1.45 \text{ und } \sigma_2 = 3.82$$

- Bemerkung 1: Wir erinnern uns an die Quotientenregel …
- Bemerkung 2: Die Verteilung der Verzweigungs- und Vereinigungspunkte ist offensichtlich nicht symmetrisch!

12.5 Beispiel 2

- Ausgehend von $s = -1$ und $s = -2$ hat diese Funktion offenbar ein Maximum bei $\sigma_1 = -1{,}45$ → Verzweigungspunkt
- Zwischen $s = 3$ und $s = 5$ hat die Funktion ein Minimum bei σ_2 → Vereinigungspunkt
- Auf der reellen Achse

$$K|_{s=\sigma} = -\frac{1}{G(s)H(s)} = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)}$$



12.5 Beispiel 2

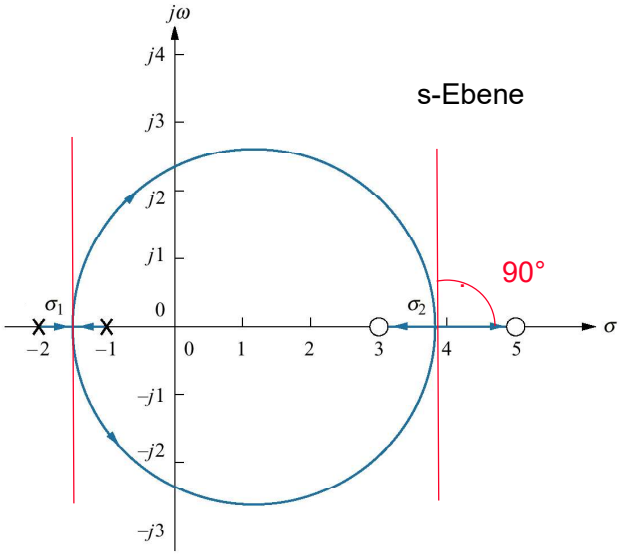
Mit den übrigen Regeln lässt sich nun rasch eine Skizze erstellen.

Beachte:

Bei den Verzweigungs- bzw. den Vereinigungspunkten formen die WOK-Äste immer einen Winkel von $180°/n$, wobei n die Anzahl der von der reellen Achse abzweigenden bzw. auf der reellen Achse eintreffenden Polstellen ist

Zur Übung:

Bestimmen Sie die Stabilitäts-grenze mit Hilfe von Matlab …



12.5 Probe: Wende Regel 6 an

Gemäß Regel 5 ergeben sich die Verzweigungs- und Vereinigungspunkte zu

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s - s_{P,j}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - s_{N,i}}$$

Für dieses Beispiel folgt

$$\frac{1}{\sigma - 3} + \frac{1}{\sigma - 5} = \frac{1}{\sigma + 1} + \frac{1}{\sigma + 2}$$

Zwischenschritt

$$\frac{2\sigma - 8}{(\sigma - 3)(\sigma - 5)} = \frac{2\sigma + 3}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)}$$

$$11\sigma^2 - 26\sigma - 61 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = -1.45 \text{ and } \sigma_2 = 3.82$$

Gliederung

12.1 Einleitung
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve
12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve
12.4 Regeln zur Erstellung einer Wurzelortskurve
12.5 Beispiele
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung
12.7 Hausaufgaben

12.6 Approximation durch ein System 2. Ordnung

Skizze und Kalibrierung der WOK

- Amplituden- und Phasenbedingung hilfreich

$$|KG(s)H(S)| = 1$$
$$\angle KG(s)H(S) = (2k+1)\cdot 180°$$

Beispiel: Gegeben sei wieder das folgende System

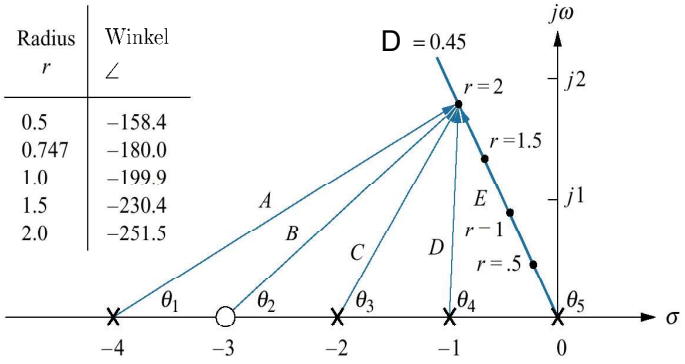
$$KG(s)H(s) = \frac{K\cdot(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

s-Ebene

- Welches K ist nötig für 20 % Überschwingen (20 %OS → Dämpfungsgrad $D = 0{,}45$)?

- Die Phasenbedingung 180° wird erfüllt für $r = 0{,}747$

Radius r	Winkel $\angle$
0.5	−158.4
0.747	−180.0
1.0	−199.9
1.5	−230.4
2.0	−251.5

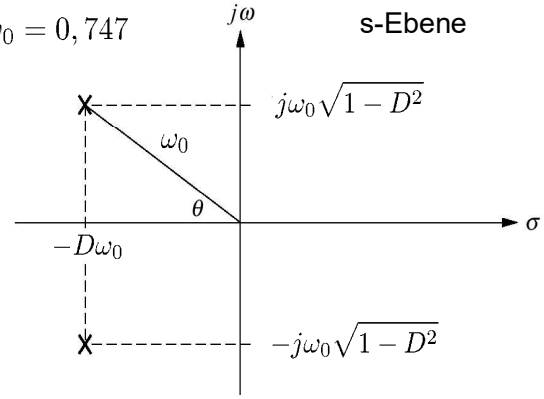


12.6 Approximation durch Systeme 2. Ordnung II

Zur Erinnerung: Charakterisierung von Systemen 2. Ordnung in Vorlesung 5:

$$\%OS = e^{-D\pi/\sqrt{1-D^2}}\cdot 100\% \qquad D = 0,45$$
$$r = \omega_0 = 0,747$$

s-Ebene



Die zugehörigen Pole liegen bei

$$s_{P1,2} = -0,3361 \pm j0,667$$

Betrachte nur den oberen Pol:

$$|A| = \sqrt{(4-0,3361)^2 + 0,667^2} = 3,724$$
$$|B| = \sqrt{(3-0,3361)^2 + 0,667^2} = 2,746$$
$$|C| = \sqrt{(2-0,3361)^2 + 0,667^2} = 1,7926$$
$$|D| = \sqrt{(1-0,3361)^2 + 0,667^2} = 0,941$$
$$|E| = \sqrt{(0,3361)^2 + 0,667^2} = 0,747$$

Amplituden-Kriterium: $K = \dfrac{\text{II Abstände zu Polstellen}}{\text{II Abstände zu Nullstellen}} = \dfrac{|A||C||D||E|}{|B|} = 1,71$

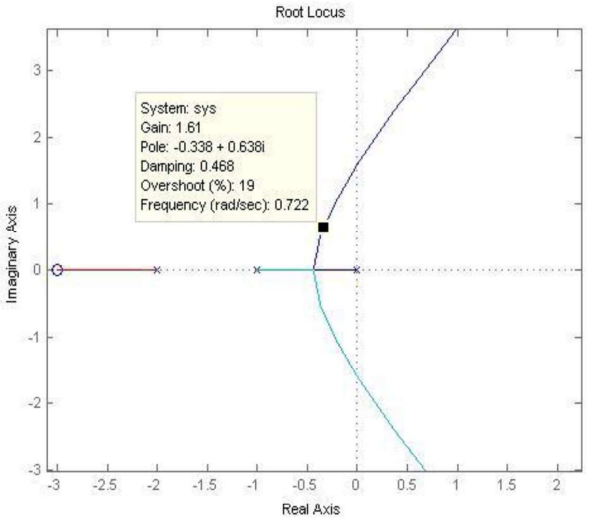
12.6 Überprüfung mit MATLAB

Geben Sie auf der MATLAB-Kommandoebene folgende Befehle ein

```
>> num = [1 3]
>> den = [1 7 14 8 0]
>> sys = tf(num,den)
>> rlocus(sys)
```

Alternativ:
RLOCUS_beispiel3.m

- Klicken Sie auf die WOK nahe der Stelle, wo die angestrebte Pol-Lage ist.
- Die berechneten Werte sind i.d.R. nahe bei den gewünschten Polstellen …



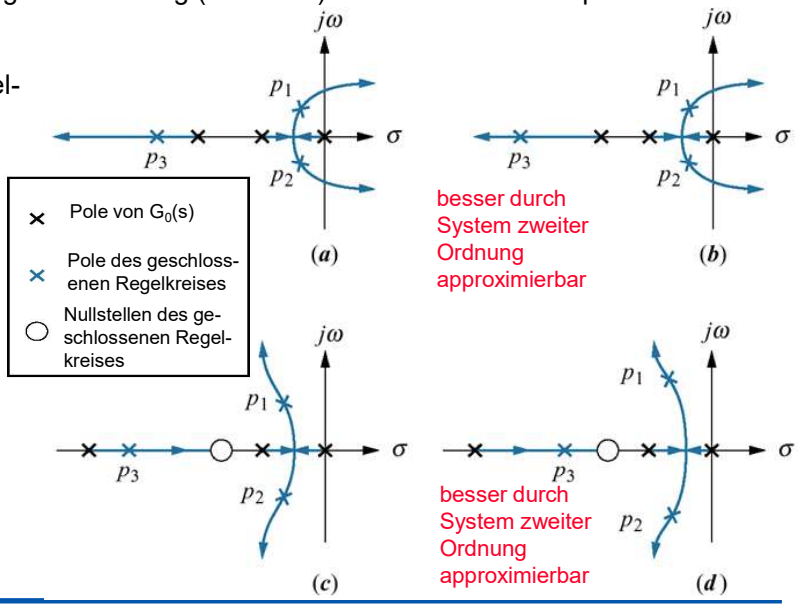
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung

Bedingungen, die eine Approximation durch eine System zweiter Ordnung rechtfertigen

1) Pole höherer Ordnung sind weit weg (weit links) vom dominanten Polpaar.

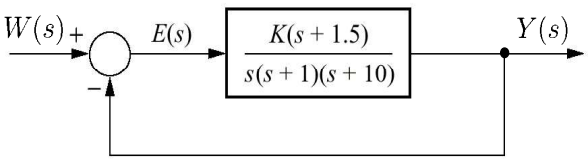
2) Nullstellen des geschlossenen Regelkreises in der Nähe des dominanten Polpaars werden durch andere Pole „kompensiert".

3) Nicht-kompensierte Nullstellen des geschlossenen Regelkreises sind weit links.

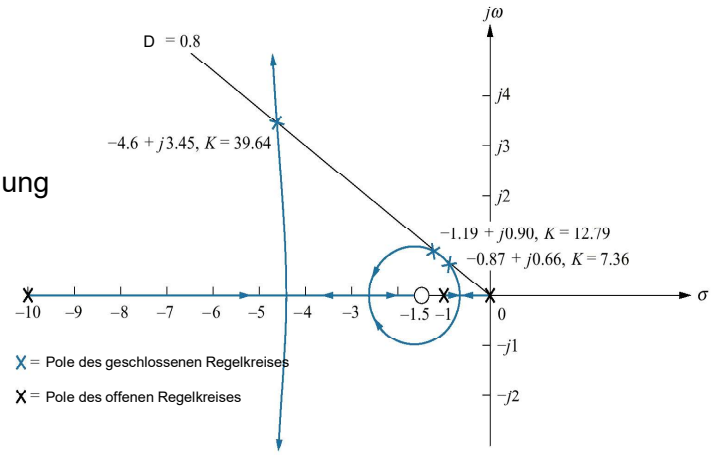


12.6 Beispiel: System 3. Ordnung mit einer Nullstelle

Aufgabe: Gegeben ist



- Welches K ergibt ein Überschwingen von 1.52 % (d.h. $D = 0{,}8$)?
- Bestimmen Sie ferner die Einstellzeit T_s, die Überschwingzeit T_p und die bleibende Regelabweichung



Lösung:

- WOK siehe Skizze rechts
- Wir bemerken:
  System dritter Ordnung mit einer Nullstelle

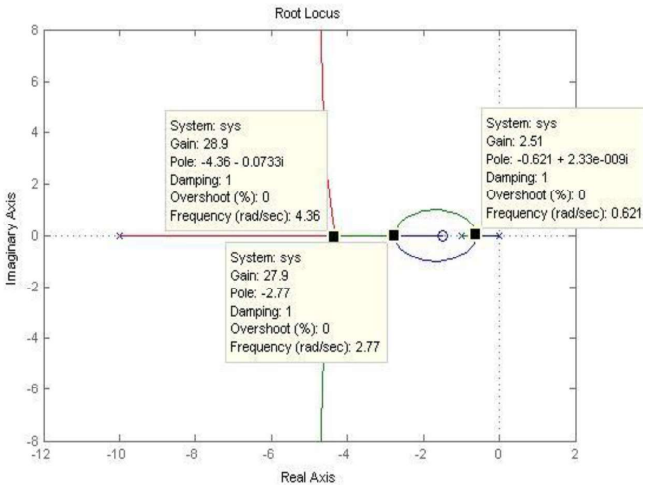
12.6 Beispiel: System 3. Ordnung mit einer Nullstelle II

Wir stellen fest:

- Zwei Verzweigungspunkte zwischen 0 und -1 sowie zwischen – 1,5 und -10
- Ein Vereinigungspunkt muss zwischen - 1.5 und -10 liegen

```
>> num = [1 1.5];
>> den = [1 11 10 0];
>> sys = tf(num,den);
>> rlocus(sys)
```

Siehe: RLOCUS_beispiel4.m



Verzweigungspunkte

- s = - 0.62 bei K = 2.511 und
- s = - 4.4 bei K = 28.89

Vereinigungspunkt

- s = - 2.8 bei K = 27.91

12.6 Beispiel: System 3. Ordnung mit einer Nullstelle III

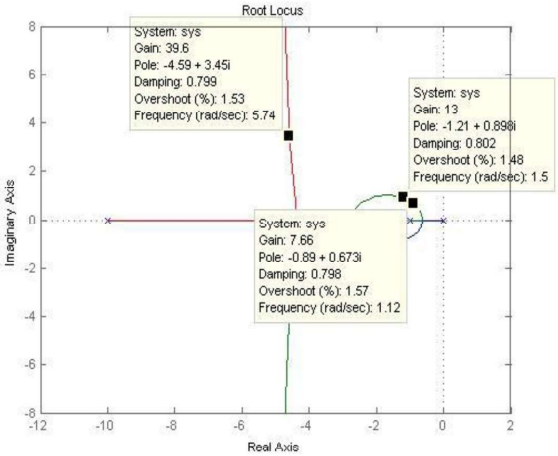
RWTH AACHEN UNIVERSITY

- 1.52 % Überschwingen bedeutet
  $D = 0{,}8$.
- Suche nach Polen des geschlossenen Regelkreises entlang der
  $D = 0{,}8$ - Linie …

$$T_s \approx \frac{4}{D\omega_0} \qquad T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}}$$

- Bleibende Regelabweichung (Steady-state error)

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} = 0$$



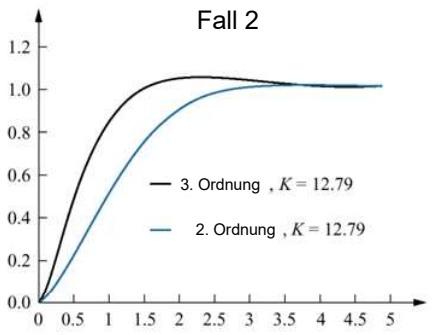
Fall	Pole gesch. RK	Nullstellen	K	dritter Pol	T_s	T_p
1	$-0.87 \pm j0.66$	$-1.5 + j0$	7.36	-9.25	4.60	4.76
2	$-1.19 \pm j0.90$	$-1.5 + j0$	12.79	-8.61	3.36	3.49
3	$-4.60 \pm j3.45$	$-1.5 + j0$	39.64	-1.80	0.87	0.91

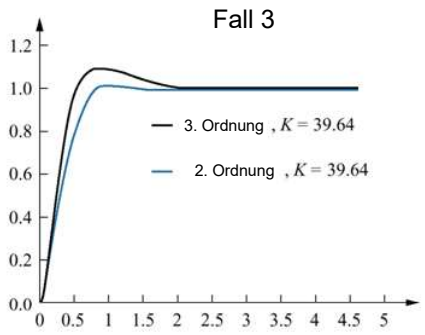
12.6 Beispiel: System 3. Ordnung mit einer Nullstelle IV

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Wie gut ist eine Approximation durch ein System zweiter Ordnung?

- Fall 1 und 2 haben einen dritten Pol weit weg von der Nullstelle im geschlossenen Regelkreis → keine Pol-Nullstellen-Kompensation möglich.
- Im Fall 3 sind allerdings der dritte Pol und die Nullstelle des geschlossenen Regelkreises nahe beieinander.
  - Die Systemantwort des dominanten Polpaares ist 6,9 x größer als die exponentielle Antwort des dritten Pols
  - In diesem Fall ist ein Approximation durch ein System zweiter Ordnung valide …





Gliederung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

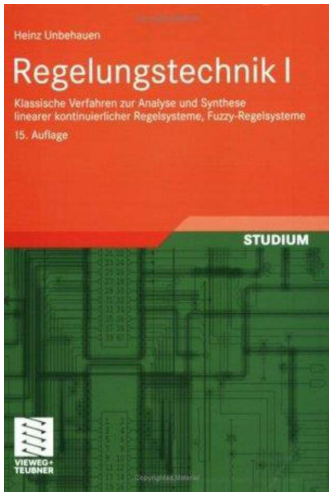
12.1 Einleitung
12.2 Grundlagen der Wurzelortskurve
12.3 Eigenschaften der Wurzelortskurve
12.4 Regeln zur Erstellung einer Wurzelortskurve
12.5 Beispiele
12.6 Auslegung eines Regelkreises über die Einstellung der Verstärkung
12.7 Hausaufgaben

12.7 Hausaufgaben

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Überprüfen Sie die angegebenen Beispiele in Matlab

- Freuen Sie sich über die Campus-Lizenz!
  - RLOCUS_beispiel1.m
  - RLOCUS_beispiel2.m
  - RLOCUS_beispiel3.m
  - RLOCUS_beispiel4.m



Zum Weiterlesen:

- H. Unbehauen, „Regelungstechnik I“, 15. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
  - Lesen Sie Kap. 7

12.8 Zu guter Letzt: Was ist eigentlich eine *Black Box*?

„Als Black Box bezeichnet man in Kybernetik und Systemtheorie ein (möglicherweise sehr komplexes) System, von welchem im gegebenen Zusammenhang nur das äußere Verhalten betrachtet werden soll."

https://de.wikipedia.org/wiki/Black_Box_(Systemtheorie)